DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ
DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul I, nr. 1
AUGUST 2018

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Comitetul de redacție:

Stelian Corneliu ANDRONESCU	Eduard ASADURIAN
Tudor BĂLĂNESCU	Costel BĂLCĂU - redactor șef
Loredana BĂLILESCU	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Ionuț DINCĂ	Mihaela DUMITRACHE
Mihai Armand IONESCU	Florentin IPATE
Constantin GEORGESCU	Raluca Mihaela GEORGESCU
Camelia GHELDIU	Marius MACARIE
Maria MIROIU	Emil MOLDOVEANU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Doru Nicolae STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacţia: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești., Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul I, Nr. 1, August 2018

Cuprins

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI 5

D. Constantin

Prezentarea Departamentului Matematică-Informatică 5

D.A. Popescu, C. Bălcău, D. Constantin

Prezentarea Concursului de Informatică ,,Programming Day for High School", Ediția I, Pitești, 27 mai 2017 10

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 21

V. Alexandru, S.C. Andronescu

Numere prime de forma $p = x^2 + My^2$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$ și $M \in \{1, 2, 3\}$ 21

M. Chirciu

În legătură cu o inegalitate din ,,Mathematical Reflections" nr. 6/2015 25

L.M. Giugiuc, D. Trăilescu Gogan

Coordonate analitice practice 27

M. Ionescu

Asupra unei probleme propuse la Olimpiada Națională de Matematică 31

F. Stănescu

Probleme de calcul integral. Inegalități integrale I 33

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 39

C. Bălcău

Optimalitatea algoritmului de căutare binară 39

ROWEB Development

Perspective profesionale pentru pasionații de programare 52

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI 55

L. Deaconu

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare 55

R.M. Georgescu

Determinarea pozițiilor relative a mai multor drepte în plan cu ajutorul mediului Maple . 65

RUBRICA DE ROBOTICĂ 70

D.A. Popescu

Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3 70

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 79
Teste pentru examenul de Evaluare Națională 79
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 86
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 91
Teste pentru admiterea la facultate 97
Teste grilă pentru admiterea la facultate 100

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 110
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 110
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 120
Teste pentru admiterea la facultate 135
Teste grilă pentru admiterea la facultate 136

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 143
Probleme propuse 143

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 150
Probleme propuse 150

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII 172

S.C. Andronescu

Formula de alungare a lui L. Euler 172

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI

Prezentarea Departamentului Matematică-Informatică

Doru Constantin [1]

Învățământul superior din Pitești a debutat în anul 1962 prin înființarea Institutului Pedagogic din Pitești. Din anul 1974 Institutul Pedagogic s-a transformat în Institutul de Învățământ Superior Pitești, iar în cadrul acestuia a funcționat specializarea Matematică.

Universitatea din Pitești, ca instituție de învățământ superior cu statut juridic propriu, a fost înființată prin ordinul Ministerului Învățământului nr. 4844 / 22.03.1991. În cadrul Facultății de Științe au funcționat specializările Matematică și Matematică-Informatică, iar din anul 2002 s-a acreditat programul de studii universitare de licență Informatică.

Facultatea de Matematică-Informatică a fost înființată în 2002, iar din 2016 în urma procesului de reorganizare administrativă a Universității din Pitești, în conformitate cu *H.G. 654/2016*, a format împreună cu entitățile anterioare reprezentate de Facultatea de Științe și de Facultatea de Educație Fizică și Sport, facultatea actuală denumită Facultatea de Științe, Educație Fizică și Informatică.

Facultatea de Științe, Educație Fizică și Informatică (F.Ș.E.F.I.) este în prezent alcătuită din 5 departamente (*Matematică-Informatică, Științe ale Naturii, Ingineria Mediului și Științe Inginerești Aplicate, Asistență Medicală și Kinetoterapie, Educație Fizică și Sport*) la care predau peste 130 de cadre didactice titulare și asociate.

Facultatea de Științe, Educație Fizică și Informatică organizează, coordonează și verifică activitatea de producere, de transmitere și de valorificare a cunoașterii în 13 programe de studii universitare de licență, 10 programe de studii universitare de masterat, 4 programe de studii universitare de doctorat și 4 programe de studii postuniversitare de conversie profesională active în anul universitar curent. De asemenea, în cadrul facultății sunt acreditate 2 *programe de studii universitare de masterat cu predare în limbă străină* (*un program de studii universitare de masterat în limba engleză în domeniul Informatică și unul în limba franceză în domeniul Educație Fizică și Sport*).

Departamentul Matematică-Informatică (D.M.I.) oferă posibilitatea dezvoltării științifice la nivel superior prin oferta educațională ce cuprinde: 2 programe de studii universitare de licență (*în domeniile Informatică și, respectiv, Matematică*), 4 programe de studii universitare de masterat (*în domeniile Informatică și, respectiv, Matematică*), precum și 2 programe de studii universitare de doctorat (*în domeniile Informatică și, respectiv, Matematică*).

În Departamentul Matematică-Informatică activitățile didactice de specialitate din cadrul programelor de studii universitare de licență, masterat și doctorat în domeniile Matematică și Informatică sunt acoperite de peste 30 de cadre didactice titulare și asociate care au pregătirea

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro

științifică adecvată atestată prin studiile de licență și/sau doctorat în domeniile disciplinelor predate.

Programele de studii universitare de licență, masterat și doctorat gestionate, în prezent, de Departamentul Matematică-Informatică sunt sintetizate în următorul tabel.

1. Domenii de licență și programe de studii universitare de licență			
Domeniul de licență	***Programul de studii***	***Statutul programului***	***Cifra Aracis de școlarizare***
Informatică	Informatică	Acreditat	100
Matematică	Matematică	Acreditat	30
2. Programele de studii universitare de masterat			
Programul de studii		***Statutul programului***	***Cifra Aracis de școlarizare***
Tehnici avansate pentru prelucrarea informației (*Advanced Techniques for Information Processing*)		Acreditat	50
Modelarea, proiectarea si managementul sistemelor software		Acreditat	50
Matematică aplicată		Acreditat	50
Matematică didactică		Acreditat	50
3. Programele de studii universitare de doctorat			
Programul de studii		***Școala Doctorală***	
Informatică		Școala doctorală de Informatică	
Matematică		Școala doctorală de Matematică	

În concordanță cu misiunea Universității, prezentată în *Carta Universității din Pitești* și cu solicitările actuale de pe piața forței de muncă regionale și naționale, Departamentul Matematică-Informatică din cadrul Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică are următoarele misiuni didactice și de cercetare științifică:

1. asigurarea pentru fiecare program de studiu a unor planuri de învățământ și programe analitice adecvate, care să permită recunoașterea competențelor obținute, atât în țară cât și în străinătate;
2. pregătirea de specialiști de performanță care să fie capabili a asigura dezvoltarea societății informaționale din România în contextul integrării țării noastre în Comunitatea Europeană;
3. participarea la programe europene de mobilitate a studenților și a cadrelor didactice;
4. formarea de specialiști cu înaltă calificare în domeniile informatică și matematică, la un nivel compatibil cu cel din UE, cât și cadre didactice necesare învățământului național și internațional în domeniile matematică și informatică;
5. pregătirea psiho-pedagogică și metodică adecvată pentru exercitarea funcției de profesor în învățământul preuniversitar și universitar;
6. formarea de specialiști în domeniile matematică și informatică, profesori de matematică, profesori de informatică, matematicieni, informaticieni, etc;
7. asigurarea pregătirii continue în domeniile matematică și informatică;
8. efectuarea de servicii sociale și culturale pentru membrii comunității academice și din afara ei, prin dezvoltarea și difuzarea valorilor culturale, științifice, realizarea echilibrului necesar între cultura științifică, tehnologică și umanistă, schimbarea mentalităților și atitudinilor, promovarea relațiilor internaționale;
9. valorificarea potențialului științific pe care-l reprezintă cadrele didactice ale departamen-

tului, în activitatea de cercetare științifică și de publicare, prin prezentarea rezultatelor cercetării și a experienței științifice acumulate prin participarea la conferințe naționale și internaționale de specialitate.

În acest context, programele de studii universitare din domeniile Matematică și Informatică contribuie la îndeplinirea misiunii facultății și aduce elemente de specificitate și oportunitate, după cum rezultă din obiectivele generale și din obiectivele specifice ale fiecărui program de studiu.

Obiectivele generale al programelor de studii universitare se pot sintetiza astfel:

1. asigurarea unei pregătiri de înalt nivel a studenților în domeniile matematică și informatică, astfel încât aceștia să poată ocupa un loc de muncă în învățământ (profesor de matematică, informatică sau tehnologia informației), în mediul socio-economic (analist programator, administrator de rețele, proiectant sisteme informatice, statistician etc.) sau să fie capabili a continua studiile în cadrul masteratelor din universitatea noastră sau din alte universități (din țară sau din străinătate);
2. formarea de specialiști cu înaltă calificare, cu competențe bine definite în domeniul tehnologiilor informaționale și al sistemelor informatice, pentru mediul de afaceri, în toate tipurile de activități economico-sociale, la un nivel compatibil cu cel din UE, cât și cadre necesare învățământului;
3. adaptarea ofertei educaționale la evoluția structurală a mediului economic românesc;
4. integrarea în rețele universitare naționale și internaționale pe criterii de performanță și complementaritate;
5. susținerea accesului absolvenților la oportunitățile existente pe piața muncii naționale și europene;
6. prestarea de activități specifice solicitate de beneficiari în condiții comerciale competitive.

La nivelul Departamentului Matematică-Informatică funcționează Centrul de Cercetare ***„Modele de calcul si metodologii de programare" (MCMP).*** Planul de cercetare al Centrului de Cercetare include o serie de obiective și de activități, structurate pe direcții de cercetare, teme de cercetare și colective de cadre didactice.

Obiectivele principale ale planului de cercetare vizează îmbunătățirea calității activității în cercetare prin:

- eficientizarea activității de cercetare științifică a cadrelor didactice din Departamentul Matematică-Informatică, prin orientarea activităților specifice pe direcțiile prioritare stabilite la nivel național;

- realizarea unor programe de cercetare cu implicații directe asupra modernizării și eficientizării bazei materiale a facultății, prin participarea la competițiile de proiecte de cercetare naționale și internaționale;

- implicarea unui număr tot mai mare de studenți, masteranzi și doctoranzi în activitatea de cercetare;

- identificarea și realizarea unor noi colaborări cu firme software sau alți parteneri din mediul socio-economic în vederea valorificării potențialului de cercetare;

- realizarea unor colective de cercetare interdisciplinară, în colaborare cu alte instituții de pe plan național și internațional.

Activitatea de cercetare a cadrelor didactice ale Departamentului Matematică-Informatică se desfășoară în următoarele domenii de cercetare:

1. Aplicații WEB și E-learning;
2. Modele de calcul și metodologii de programare;
3. Teoria informației și sisteme avansate de baze de date;
4. Inteligență artificială și modele matematice cu aplicații în informatică;
5. Recunoașterea formelor și rețele neuronale;
6. Verificarea și testarea sistemelor de programe, specificarea și proiectarea sistemelor software complexe;
7. Algebră și geometrie computațională, calcul numeric, optimizări, teoria codurilor și criptografie;
8. Metode numerice în mecanica fluidelor și solidelor, sisteme dinamice, teoria bifurcației, ecuații diferențiale;
9. Mecanica mediilor continue, calcul optimal, metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale, teoria omogenizării;
10. Teoria potențialului, procese stocastice, analiză neliniară și operatori;
11. Teoria geometrică a funcțiilor univalente.

Anual, Departamentul Matematică-Informatică organizează *Sesiunea de comunicări științifice studențești (SCSS)*, la care participă un număr mare de studenți. Departamentul Matematică-Informatică coordonează secțiunile aferente domeniilor Informatică și Matematică astfel:

- *Informatică* (la care participă în special studenți de la programul de studii universitare de licență *Informatică* și de la programele de studii universitare de masterat *Advanced Techniques for Information Processing* și *Modelarea, Proiectarea și Managementul Sistemelor Software*);

- *Informatică aplicată* (la care participă în special studenți de la programul de studii universitare de licență *Informatică* și de la programele de studii universitare de masterat *Advanced Techniques for Information Processing* și *Modelarea, Proiectarea și Managementul Sistemelor Software*);

- *Matematică* (la care participă în special studenți de la programul de studii universitare de licență *Matematică* și de la programul de studii universitare de masterat *Matematică Didactică*);

- *Matematică aplicată* (la care participă în special studenți de la programul de studii universitare de licență *Matematică* și de la programul de studii universitare de masterat *Matematică Aplicată*).

Tot anual, departamentul organizează sesiunea de comunicări științifice pentru doctoranzi (*The Doctoral Student Workshop*). Sesiunea științifică dedicată doctoranzilor cuprinde două secțiuni astfel:

- *The Doctoral Student Workshop in Computer Science* (la care participă în special studenții de la programele de studii universitare de doctorat în *Informatică* de la Școala Doctorală de Informatică a Universității din Pitești, dar și din alte centre universitare);

- *The Doctoral Student Workshop in Mathematics* (la care participă în special studenții de la programele de studii universitare de doctorat în *Matematică* de la Școala Doctorală de Matematică a Universității din Pitești, dar și din alte centre universitare).

Începând din anul 2017 Departamentul Matematică-Informatică organizează anual evenimentul ,,**Programming Day for High School" -** *concurs de programare* C/C++ *pentru*

elevi cu 4 secțiuni corespunzătoare claselor a IX-a, a X-a, a XI-a și a XII-a și *programarea roboților* LEGO Mindstorms EV3, la care participă un număr mare de elevi proveniți de la liceele reprezentative din județul Argeș dar și din județele învecinate.

Tot începând din anul 2016 Departamentul Matematică-Informatică organizează anual evenimentul ,,**WAC&WS - WEB Applications Contest and Workshop for Students" -** *concurs de programare* WEB *și workshop* WEB *pentru studenți*, cu participarea unui număr mare de studenți de la programele de specialitate din cadrul Departamentului Matematică-Informatică, din universitate și din alte universități.

Departamentul Matematică-Informatică implementează misiunea Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică de dezvoltare ca entitate academică de elită la nivel regional și național care sprijină activitățile de cercetare, de creștere a calității și eficienței proceselor de învățământ, de relaționare cu comunitatea academică și cu cea a mediului socio-economic din regiune.

Prezentarea Concursului de Informatică ,,Programming Day for High School", Ediția I, Pitești, 27 mai 2017

Doru Anastasiu Popescu [1], *Costel Bălcău* [2] *și Doru Constantin* [3]

Departamentul Matematică-Informatică al Universității din Pitești a organizat, în data de 27 mai 2017, prima ediție a concursului de programare clasică (folosind limbajele Pascal/C/C++, mediul de programare Code::Blocks) și de programarea roboților LEGO (folosind mediul Mindstorms EV3) cu numele ,,Programming Day for High School". La această ediție au participat elevi de la unități școlare din județele Argeș și Olt.

Premiile câștigătorilor au fost sponsorizate de firma ROWEB Development, director general Viorel Costea (profesor de Informatică) și de firma Velox Logistics Center, director economic Adriana Neaga.

Concursul de programare clasică

Acesta a fost organizat pe trei secțiuni, corespunzătoare clasei a IX-a, clasei a X-a și claselor a XI-a și a XII-a. Concurenții au avut de rezolvat câte două probleme, fiecare având un punctaj de 100 de puncte. În continuare prezentăm problemele date în concurs, împreună cu indicații de rezolvare.

Clasa a IX-a

Problema 1 – pasi

Vasile contorizează pașii făcuți de acasă până la școală și observă că în unele zile numărul acestora verifică anumite proprietăți. În unele zile este un produs de exact trei numere prime (numit **3-prim**), alteori este factorialul unui număr (numit **factorial**), iar alteori este cub perfect (numit **cub**).

Cerință

Cunoscând numărul de zile N și numărul de pași din fiecare zi $x_1, x_2, ..., x_N$ se cere:

1. numărul de numere **3-prim**;

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com
[2]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com
[3]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro

2. numărul de numere **factorial**;
3. numărul de numere **cub**.

Date de intrare
Fișierul de intrare `pasi.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1, 2 sau 3.

Pe linia a doua se află N, iar pe linia a treia se află numerele $x_1, x_2, \ldots, x_N$ separate prin câte un spațiu, reprezentând numărul de pași până la școală în fiecare din cele N zile.

Date de ieșire
Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `pasi.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de numere **3-prim** din șirul $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `pasi.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de numere **factorial** din șirul $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Dacă valoarea lui p este 3, **se va rezolva numai punctul 3)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `pasi.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de numere **cub** din șirul $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100000$
- $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_N \leq 10000$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 40% din punctaj, a cerinței 2 se acordă 30% din punctaj și a cerinței 3 se acordă 30% din punctaj
- Pentru 30% din teste $N \leq 1000$

Exemple

`pasi.in`	`pasi.out`	Explicație
1 3 66 11 30	2	$p = 1$ În șirul dat există două numere **3-prim** și anume: $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
`pasi.in`	`pasi.out`	Explicație
2 3 66 24 30	1	$p = 2$ În șirul dat există un număr **factorial** și anume: $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.
`pasi.in`	`pasi.out`	Explicație
3 3 27 11 125	2	$p = 3$ În șirul dat există două numere **cub** și anume: $27 = 3^3$, $125 = 5^3$.

Timp maxim de execuție: 0.3 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție de 30 de puncte

1. Se citesc p și N.

2. $Nr = 0$.

3. Pentru fiecare număr din șir, în funcție de valoarea lui p $(1, 2, 3)$ se verifică dacă îndeplinește una din condițiile de **3-prim**, **factorial** sau **cub**. Dacă este îndeplinită condiția, atunci $Nr = Nr + 1$.

4. Se afișează Nr.

Soluție de 100 de puncte

1. Se construiesc trei tablouri unidimensionale a, b, c de dimensiune 10000, unde:

$a[i] = 1$, dacă i este **3-prim** și 0 în caz contrar,

$b[i] = 1$, dacă i este **factorial** și 0 în caz contrar,

$c[i] = 1$, dacă i este **cub** și 0 în caz contrar,

unde i ia valorile 1, 2, ..., 10000.

2. Se citesc p și N.

3. $Nr = 0$.

4. Pentru fiecare număr din șir, memorat în variabila k, în funcție de valoarea lui p $(1, 2, 3)$, se verifică dacă îndeplinește una din condițiile $a[k] == 1$ (**3-prim**), $b[k] == 1$ (**factorial**) sau $c[k] == 1$ (**cub**). Dacă este îndeplinită condiția, atunci $Nr = Nr + 1$.

5. Se afișează Nr.

Problema 2 – continent

Pe un continent se dorește organizarea unei olimpiade de robotică. Pentru a stabili ordinea de alegere a țărilor organizatoare pe ani calendaristici se stabilește drept criteriu suprafața. Astfel, o țară care are o suprafață mai mare va organiza mai repede o ediție de olimpiadă.

Pentru stabilirea suprafețelor țărilor continentului se folosește o hartă dată folosind un tablou bidimensional cu M linii și N coloane. Un element din hartă reprezintă 1 km^2 din teren. Elementele tabloului sunt numere consecutive $0, 1, 2, \ldots$. Țările sunt codificate cu $1, 2, \ldots$. Cifra 0 în tablou reprezintă teren sau apă care nu aparțin niciunei țări.

Dacă există mai multe țări cu aceeași suprafață, cea care are codul asociat mai mic va organiza prima o ediție de olimpiadă.

Cerință

Cunoscând numerele M, N și tabloul ce codifică harta, se cere:

1. suprafața țării cu codul cel mai mare;

2. codurile țărilor în ordinea descrescătoare a suprafeței.

Date de intrare

Fișierul de intrare `continent.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află M, N, separate printr-un spațiu, iar pe liniile următoare tabloul ce codifică harta, pe fiecare linie componentele sunt separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire
Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `continent.out` se va scrie un număr ce reprezintă suprafața țării cu codul cel mai mare

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `continent.out` se vor scrie codurile țărilor în ordinea organizării olimpiadelor, câte unul pe un rând.

Restricții și precizări

- $1 \leq M, N \leq 300$
- $0 \leq$ coduri țări $\leq M \cdot N$
- Pentru rezolvarea corectă a fiecărei cerințe se acordă 50% din punctaj

Exemple

`continent.in`	`continent.out`	Explicație
1 3 4 4 0 1 1 4 4 0 1 2 1 3 3	3	$p = 1$ Pe continent există 4 țări. Țara cu codul cel mai mare, 4, are suprafața egală cu 3.
`continent.in`	`continent.out`	Explicație
2 3 4 4 0 1 1 4 4 3 1 2 4 3 3	4 1 3 2	$p = 2$ Cele patru țări de pe continent codificate cu 1, 2, 3, 4 au suprafețele: 3, 1, 3, respectiv 4. Ordinea de desfășurare a olimpiadelor este 4, 1, 3, 2.

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB, din care 1 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție cerința 1
Se determină cel mai mare număr din tablou (notat cu max) și frecvența sa F. Nu trebuie memorat tabloul. Valoarea lui F se va afișa.

Soluție cerința 2
Se determină cel mai mare număr din tablou (notat cu max). Pentru fiecare numar $i = 1, 2, ..., max$ se determină de câte ori apare în tablou: $x[i]$. Se notează cu $o[i] = i$, ordinea inițială a țărilor, după care se ordonează descrescător tabloul unidimensional x și se interschimbă elementele lui o odată cu cele ale lui x. Apoi se afișează elementele tabloului o.

Clasa a X-a

Problema 1 – anagrama

Ionică trebuie să rezolve o problemă de informatică ce prelucrează texte. Mai precis, are la dispoziție un cuvânt C format din litere mici și un text T format din litere mici și spații. Cuvintele în T sunt separate prin unul sau mai multe spații. Problema pe care trebuie să o rezolve Ionică este de a determina numărul de vocale comune lui C și primului cuvânt din T și apoi numărul de cuvinte anagramă ale lui C în T. Un cuvânt X este anagramă pentru un alt cuvânt Y dacă X este format din exact literele lui Y, eventual în altă ordine.

Cerință

Cunoscând C și T se cere:

1. numărul de vocale comune din C și din primul cuvânt din T;
2. numărul de cuvinte anagramă ale lui C în T.

Date de intrare

Fișierul de intrare `anagrama.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află C, iar pe linia a treia se află T. Fiecare linie se termină cu ,,Enter".

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `anagrama.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de vocale comune din C și din primul cuvânt din T.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `anagrama.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de cuvinte anagramă ale lui C în T.

Restricții și precizări

- $1 \leq$ lungimea lui $C \leq 100000$
- $1 \leq$ lungimea lui $T \leq 100000$
- Vocalele sunt a, e, i, o, u
- Pentru rezolvarea corectă a fiecărei cerințe se acordă 50% din punctaj

Exemple

`anagrama.in`	`anagrama.out`	Explicație
1 maria marinela se joaca	2	$p = 1$ C este **maria** Primul cuvânt din T este **marinela** Sunt 2 vocale comune. a apare de două ori, dar este numărat o singură dată.

anagrama.in	anagrama.out	Explicație
2 mara vara aram dica rama aarm rama	4	$p = 2$ Cuvintele anagramă cu C în T sunt aram, rama, aarm și rama. Numărul lor este 4.

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB, din care 1 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Cerința 1

1. Se citesc C și T.

2. $Nr = 0$.

3. Se determină în i poziția primului spațiu în T. Dacă T are un singur cuvânt, atunci i este numărul de litere.

4. Pentru fiecare vocală se verifică dacă se găsește atât în C, cât și în $T_0T_1 \dots T_{i-1}$. În caz afirmativ $Nr = Nr + 1$.

5. Se afișează Nr.

Cerința 2

1. Se construiește vectorul de frecvențe al literelor mici pentru cuvântul C, fie acesta $x = (x_0, x_1, \dots, x_{25}), x_i$ este numărul de apariții a celei de-a $i - a$ literă din alfabet în C.

2. $Nr = 0$.

3. Pentru fiecare cuvânt din T se determină vectorul de frecvențe al literelor mici: $y = (y_0, y_1, \dots, y_{25})$. Dacă x și y au aceleași componente atunci $Nr = Nr + 1$.

4. Se afișează Nr.

Problema 2 – cuburi

Ionică are un sac plin cu cuburi, numerotate cu $1, 2, \dots, N$ și M cutii numerotate cu $1, 2, \dots, M$ în care încap $x_1, x_2, \dots, x_M$ cuburi. Din păcate cutiile nu sunt suficiente pentru a introduce cuburile din sac și mai rămân cuburi neintroduse. În fiecare zi după ce se joacă cu cuburile le introduce în cutii la capacitate maximă și ce rămâne le pune în sac. După multe zile de joacă și așezare a cuburilor în cutii, Ionică se întrebă în câte moduri diferite poate așeza cuburile în cutii, știind că ordinea cuburilor dintr-o cutie nu are importanță.

Cerință

Cunoscând numerele N, M și capacitățile cutiilor, se cere:

1. numărul maxim de cuburi pe care le poate pune în $[M/2]$ cutii;

2. în câte moduri diferite se pot așeza cuburile în cutii, știind că ordinea cuburilor în cutii nu are importanță.

Date de intrare

Fișierul de intrare `cuburi.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află N, M, separate printr-un spațiu, iar pe linia următoare numerele $x_1, x_2, \ldots, x_M$ separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `cuburi.out` se va scrie un număr ce reprezintă numărul maxim de cuburi pe care le poate pune în $[M/2]$ cutii.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `cuburi.out` se va scrie numărul de moduri diferite în care se pot așeza cuburile în cutii. Numărul va fi afișat modulo 60013.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 1000$
- $1 \leq M \leq 1000$
- $0 \leq x_1 + x_2 + ... + x_M \leq N$
- x modulo y reprezintă restul împărțirii lui x la y
- Pentru rezolvarea corectă a fiecărei cerințe se acordă 50% din punctaj

Exemple

`cuburi.in`	`cuburi.out`	Explicație
1 4 2 1 2	2	$p = 1$ Cutia cea mai mare conține 2 cuburi.
`cuburi.in`	`cuburi.out`	Explicație
2 4 2 1 2	12	$p = 2$ La cerința 2 numărul de modalități de așezare a cuburilor este 12.

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 8 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Cerința 1

Se ordonează descrescător vectorul x și se calculează $s = x_1 + x_2 + ... + x_{[M/2]}$. Apoi se afișează s.

Cerința 2

Numărul căutat este $C(N, x_1) \cdot C(N - x_1, x_2) \cdot \ldots \cdot C(N - (x_1 + ... + x_{M-1}), x_M)$ modulo 60013. Combinările din produs se calculează folosind triunghiul lui Pascal modulo 60013.

Clasele a XI-a și a XII-a

Problema 1 – paranteze

La ora de informatică Georgică a învățat să scrie parantezările corecte folosind N perechi de paranteze rotunde. O parantezare corectă respectă regulile din aritmetică. Adâncimea unei parantezări este numărul maxim de perechi de paranteze una în alta. De exemplu, pentru $N = 2$, parantezările corecte sunt $()(), (())$. Prima are adâncimea 1, iar a doua 2. Pentru numerele N, M și k, Georgică vrea să determine numărul de parantezări cu M perechi de paranteze cu adâncimea cel mult k, precum și numărul total de parantezări distincte cu $1, 2, ..., N$ perechi de paranteze.

Cerință

Cunoscând numerele N, M și k se cere:

1. numărul de parantezări cu M perechi de paranteze și adâncimea cel mult k, modulo 60013;

2. numărul total de parantezări distincte cu $1, 2, ..., N$ perechi de paranteze modulo 60013.

Date de intrare

Fișierul de intrare `paranteze.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află N, M și k cu spațiu între ele.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `paranteze.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de la cerința 1.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `paranteze.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de la cerința 2.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 1000$
- $1 \leq M \leq 15$
- $1 \leq k \leq M$
- x modulo y reprezintă restul împărțirii lui x la y
- Pentru rezolvarea corectă a fiecărei cerințe se acordă 50% din punctaj

Exemple

`paranteze.in`	`paranteze.out`	Explicație
1 2 2 1	1	$p = 1$ $N = 2$, $M = 2$, $k = 1$. Avem două parantezări $()()$, $(())$. Prima are adâncimea 1, iar a doua adâncimea 2, astfel se numără doar prima.

paranteze.in	paranteze.out	Explicație
2 2 2 1	3	$p = 2$ $N = 2$, $M = 2$, $k = 1$. Avem o parantezare cu o pereche de paranteze: () și două parntezări cu două perechi de paranteze: ()(), (()). Total 3 parantezări.

Timp maxim de execuție: 0.5 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 32 MB, din care 4 MB pentru stivă.

Doru Constantin, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Cerința 1

Se generează parantezările de adâncime cel mult k folosind metoda backtracking și se incrementează o variabilă Nr. Apoi se afișează Nr.

Cerința 2

Numărul de parantezări cu n perechi de paranteze este numărul lui Catalan:

$$C(n) = \text{comb}(2n, n)/(n+1) = \text{comb}(2n, n) - \text{comb}(2n, n-1).$$

Numărul căutat este $Nr = (C(1) + C(2) + ... + C(n))$ modulo 60013.

Combinările din sumă se calculează cu triunghiul lui Pascal modulo 60013.

Problema 2 – grupuri

La sfârșitul clasei se contorizează situațiile în care doi elevi s-au ajutat reciproc. Elevii sunt codificați prin numerele $1, 2, ..., N$. Sunt M perechi de elevi care s-au ajutat reciproc. Pentru fiecare astfel de pereche se cunoaște numărul de situații în care s-au ajutat reciproc. În funcție de aceste situații s-au constituit grupuri de elevi. Doi elevi i, j fac parte din același grup dacă există un șir de elevi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ cu $x_1 = i$, $x_k = j$ și $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$ s-au ajutat reciproc cel puțin o dată.

Cerință

Cunoscând numărul de elevi N, numărul M de perechi de elevi care s-au ajutat cel puțin o dată, precum și perechile de elevi împreună cu numărul de situații în care s-au ajutat, se cere:

1. numărul de grupuri;
2. valoarea maximă a numărului total de situații de ajutor reciproc într-un grup.

Date de intrare

Fișierul de intrare `grupuri.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.
Pe linia a doua se află N, M cu spațiu între ele, iar pe următoarele M linii se află triplete de forma i j k separate prin câte un spațiu, reprezentând k situații de ajutor reciproc între elevii i și j.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `grupuri.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de grupuri.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `grupuri.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând valoarea maximă a numărului total de situații de ajutor reciproc într-un grup.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 500$
- $1 \leq M \leq 100000$
- Pentru rezolvarea corectă a fiecărei cerințe se acordă 50% din punctaj

Exemple

`grupuri.in`	`grupuri.out`	Explicație
1 5 3 1 4 5 2 3 10 3 5 15	2	$p = 1$ Elevii sunt împărțiți în două grupuri: Grupul 1 cu elevii 1 și 4; Grupul 2 cu elevii 2, 3, 5.
`grupuri.in`	`grupuri.out`	Explicație
2 5 3 1 4 5 2 3 10 3 5 15	25	$p = 2$ Elevii sunt împărțiți în două grupuri: Grupul 1 cu elevii 1 și 4 (total situatii de ajutor reciproc: 5); Grupul 2 cu elevii 2, 3, 5 (total situații de ajutor reciproc: 10+15=25). Valoarea cea mai mare este 25.

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 8 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Constantin, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Cerința 1

Se construiește un graf neorientat ponderat în care nodurile sunt elevii, iar o muchie are costul egal cu numărul de situații în care elevii asociați s-au ajutat reciproc. Pentru acest graf se determină numărul de componente conexe.

Cerința 2

Se construiește un graf neorientat ponderat în care nodurile sunt elevii, iar o muchie are costul egal cu numărul de situații în care elevii asociați s-au ajutat reciproc. Pentru acest graf se determină componentele conexe: $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Apoi pentru fiecare componentă conexă C_i se determină în x_i suma totală a costurilor muchiilor ei. Valoarea maximă din vectorul x este numărul căutat.

Concursul de programare a roboților LEGO

La acest concurs a fost propusă următoarea problemă.

Problema – robotică

Punctaj maxim 120+20=140 puncte

Durata deplasării robotului: maxim 2 minute

Planșă utilizată: WRO 2017, REGULAR CATEGORY, ELEMENTARY
(http://www.wro2017.org/Regular_Category/Elementary/WRO-2017-Regular-Category-Elementary-PrintV2.pdf)

Punct de plecare: pătrat verde, cu robotul orientat în orice direcție, dar cu toate roțile în pătratul verde.

Activitate robot: să atingă cât mai multe cuburi. Pentru atingerea unui cub indiferent de dimensiune se primesc 10 puncte (chiar dacă a fost atins de mai multe ori).

Oprirea robotului:

1. Implicit după 2 minute.
2. Când unul din concurenții strigă **stop**.
3. Când se oprește robotul sau când acesta părăsește tabla.
4. Dacă robotul se oprește în locul de unde a plecat (cu toate roțile, pe culoarea verde) atunci echipa mai primește 20 puncte.
5. Dacă se pune mâna pe robot.

Punctaj final:

Punctele se contorizează și la sfârșit constituie punctajul rundei.

O echipă are 4 runde (încercări pe planșă), cel mai mare punctaj împreună cu timpul ei va fi folosit la întocmirea clasamentului.

Masa

La masă acesul se face în ordinea sosirii unui membru al echipei. Robotul se așează la punctul de plecare și se pornește doar când un membru al juriului spune start, moment în care se pornește cronometrul.

Nicolae Bold, Slatina

Câștigătorii concursului

Premianții concursului de programare clasică, respectiv de programare a roboților LEGO Mindstorm EV3 au fost:

Secțiunea A - Clasa a IX-a: *Vădăstreanu Robert* de la Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu" Slatina – premiul I, *Coneschi Vlad* de la Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu" Slatina – premiul al II-lea, *Stanciu Ciprian* de la C.N. ,,Radu Greceanu" Slatina – premiul al III-lea;

Secțiunea B - Clasa a X-a: *Staicu Alexandru* de la C.N. ,,Ion Minulescu" Slatina – premiul I, *Mincu Daniel* de la C.N. ,,Alexandru Odobescu" Pitești – premiul al II-lea, *Popescu Răzvan* de la C.N. ,,Alexandru Odobescu" Pitești – premiul al III-lea;

Secțiunea C - Clasele a XI-a și a XII-a: *Popescu Ion Alexandru* de la C.N. ,,Radu Greceanu" Slatina – premiul I, *Dumitru Corneliu Vlad* de la C.N. ,,Ion C. Brătianu" Pitești – premiul al II-lea, *Cențiu Emil Vasilian* de la C.N. ,,Ion C. Brătianu" Pitești – premiul al III-lea;

Secțiunea R - Programarea roboților LEGO Mindstorm EV3: *Belegan David & Nicola Alex* de la C.N. ,,Ion C. Bratianu" Pitești – premiul I, *Conseschi Vlad & Vădăstreanu Robert & Constantinescu Gabriel* de la Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu" Slatina – premiul al II-lea, *Popescu Ion Alexandru & Stanciu Ciprian* de la C.N. ,,Radu Greceanu" Slatina – premiul al III-lea.

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Numere prime de forma $p = x^2 + My^2$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$ și $M \in \{1, 2, 3\}$

Victor Alexandru [1] *și Stelian Corneliu Andronescu* [2]

În acest articol vom prezenta un rezultat clasic asupra reprezentării numerelor prime, împreună cu câteva aplicații. Primul fapt semnificativ în această direcție a fost descoperit de P. Fermat: numerele prime de forma $4k + 1$ se pot reprezenta ca sumă de două pătrate perfecte.

Problema reprezentării numerelor prime sub forma $x^2 + My^2$, pentru $M \in \{1, 2, 3\}$ a fost rezolvată de L. Euler.

Propoziția 1. *Fie $p \geq 3$ un număr prim cu $(p, M) = 1$ și astfel încât congruența $x^2 \equiv -M (\mathrm{mod}\ p)$ are soluție, iar $M \in \{1, 2, 3\}$. Atunci p poate fi reprezentat sub forma $x^2 + My^2$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Prezentăm în continuare o demonstrație a lui L. Euler, care prezintă avantajul de a fi constructivă.

Demonstraţie. Deoarece $-M$ este rest pătratic modulo p, există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel că $p | a^2 + Mb^2$, iar $(p, ab) = 1$. Putem alege a, b cu $|a| < \frac{p}{2}$, $|b| < \frac{p}{2}$, de unde $a^2 + Mb^2 < \frac{p^2}{4} + M\frac{p^2}{4} \leq p^2$. Prin urmare avem $a^2 + Mb^2 = p \cdot q$, cu $1 \leq q < p$. Dacă $q \neq 1$, putem reprezenta a, b sub forma $a = q \cdot \alpha + r$, $b = q \cdot \beta + s$, cu $\alpha, \beta, r, s \in \mathbb{Z}$, $|r| \leq \frac{q}{2}$, $|s| \leq \frac{q}{2}$. Deoarece $a \equiv r (\mathrm{mod}\ q)$ și $b \equiv s (\mathrm{mod}\ q)$, rezultă $r^2 + Ms^2 \equiv a^2 + Mb^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ q)$ și $r^2 + Ms^2 \leq \frac{q^2}{4} + M\frac{q^2}{4} \leq q^2$. Să observăm că de fapt avem $r^2 + Ms^2 < q^2$ chiar dacă $M = 3$. Într-adevăr, pentru a avea egalitate ar trebui ca $|r| = |s| = \frac{q}{2}$. De aici se obține $q | 2a$ și $q | 2b$ și $q^2 | 4(a^2 + 3b^2) = 4pq$. Însă p este prim, iar $1 < q < p$. Rezultă $q = 2$ și $a^2 + 3b^2 = 2p$. Însă $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, cum vom proba ulterior, de unde $2 \equiv a^2 (\mathrm{mod}\ 3)$, ceea ce este imposibil. Prin urmare $r^2 + Ms^2 = qq_1$, cu $1 \leq q_1 < q$. În continuare folosim identitatea

$$(pq) \cdot (qq_1) = (a^2 + Mb^2)(r^2 + Ms^2) = (ar \pm Mbs)^2 + M(as \mp br)^2.$$

Deoarece $a \equiv r (\mathrm{mod}\ q)$ și $b \equiv s (\mathrm{mod}\ q)$, rezultă că $as - br \equiv 0 (\mathrm{mod}\ q)$, iar de aici se obține și $ar + Mbs \equiv 0 (\mathrm{mod}\ q)$. Rezultă că există $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $q^2 pq_1 = (qa_1)^2 + M(qb_1)^2$ sau $pq_1 = a_1^2 + Mb_1^2$, cu $1 \leq q_1 < q$. Dacă $q_1 > 1$, continuăm în același mod. După un număr finit de pași se ajunge la reprezentarea lui p sub forma dorită. □

[1] Prof. univ. dr., Universitatea din București, vralexandru@yahoo.com
[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com

Aplicații

A1. Avem $x^2+1|x^4-1|x^{p-1}-1$ dacă $p=4t+1$ iar congruența $x^{p-1}=1(\text{mod } p)$ are $p-1$ soluții (vezi Mica teoremă a lui Fermat) în $\{1,2,\ldots,p-1\}$. Deoarece numărul de soluții ale unei congruențe polinomiale $f(x)\equiv 0(\text{mod } p)$ nu poate depăși gradul f (folosind Teorema lui Lagrange) $\Rightarrow$ congruența $x^2+1\equiv 0(\text{mod } p)$ are (exact) două soluții (dacă $p\equiv 1(\text{mod } 4)$) în $\{1,2,\ldots,p-1\}$.

Fie acum $p\equiv 1(\text{mod } 8)$. Atunci $x^4+1|x^8-1|x^{p-1}-1$. Cu același argument ca mai sus rezultă că congruența $x^4+1\equiv 0(\text{mod } p)$ are patru soluții în $\{1,2,\ldots,p-1\}$.
Avem $x^4+1\equiv (x^2+1)^2-2x^2=(x^2-1)^2+2x^2$. Dacă $a^4\equiv -1(\text{mod } p)\Rightarrow (a^2+1)^2-2a^2\equiv (a^2-1)^2+2a^2\equiv 0(\text{mod } p)$.
Cum $a\not\equiv 0(\text{mod } p)$, rezultă că $\exists b,b'\in\mathbb{Z}$ și $2\equiv b^2(\text{mod } p)$ și $-2\equiv (b')^2(\text{mod } p)$.

Fie acum $p\equiv 1(\text{mod } 3)$, $p=3t+1$. Avem $x^3-1|x^{p-1}-1\Rightarrow$ (cu același argument) că $\exists a\in\mathbb{Z}$, $a\not\equiv 1(\text{mod } p)$ și $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)\equiv 0(\text{mod } p)$ de unde $4(a^2+a+1)=(2a+1)^2+3\equiv 0(\text{mod } p)\Leftrightarrow -3\equiv (2a+1)^2(\text{mod } p)$.
Se obțin astfel următoarele consecințe:

a) Dacă $p\equiv 1(\text{mod } 4)$ atunci $p=a^2+b^2$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$.

b) Dacă $p\equiv 1(\text{mod } 8)$ atunci $p=a^2+2b^2$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$.

c) Dacă $p\equiv 1(\text{mod } 3)$ atunci $p=a^2+3b^2$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$.

Observația 1. Dacă $\exists b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$ astfel încât $b^2\equiv -3(\text{mod } p)$ cu $p\neq 3$ atunci (conform raționamentului anterior), există $a\in\mathbb{N}$ astfel încât $a^2+a+1\equiv 0(\text{mod } p)\Rightarrow a^3\equiv 1(\text{mod } p)$. Dacă $(p-1,3)=1$ ar rezulta $a\equiv 1(\text{mod } p)$ iar de aici p=3, fals. Prin urmare $3|p-1$.

A2. Dacă un număr natural nenul n se scrie în două moduri ca sumă de două pătrate perfecte, atunci n este compus.

Soluție. Fie $n=a^2+b^2=c^2+d^2$, $a,b,c,d\in\mathbb{N}^\star$, $(a,b)\neq(c,d)$. Dacă a și b au aceleași paritate, atunci n este par, deci compus. Deci putem presupune că a și b, respectiv c și d sunt numere naturale distincte cu parități diferite.

Fie a și c pare, b și d impare, deci $a\neq c$, $b\neq d$.

Avem $a^2+b^2=c^2+d^2$, $a^2-c^2=d^2-b^2$, $(a-c)(a+c)=(d-b)(d+b)$, adică

$$\frac{a-c}{d-b}=\frac{d+b}{a+c}=\frac{u}{v},\ (u,v)=1.$$

Rezultă $a+c=hv$, $b+d=hu$, $a-c=ku$, $d-b=kv$, cu $h,k\in\mathbb{N}^\star$ și deci

$$a=\frac{hv+ku}{2},\ b=\frac{hu-kv}{2},\ \text{și } n=\frac{(u^2+v^2)(k^2+h^2)}{4}.$$

Se deduce ușor că însuși n admite o descompunere proprie.

Prin urmare un număr prim admite cel mult o reprezentare ca sumă de două pătrate perfecte.

A3. Dacă un număr n se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte nenule distincte, atunci orice putere a sa se poate scrie de asemenea ca sumă de două pătrate perfecte nenule.

Soluție. Fie $n=a^2+b^2$, $a,b\in\mathbb{N}^\star$.

Dacă $t = 2k+1$, atunci $n^t = n^{2k} \cdot n = n^{2k}(a^2+b^2) = (n^k \cdot a)^2 + (n^k \cdot b)^2$ cu $n^k a, n^k b \in \mathbb{N}^\star$.

Dacă $t = 2k$ demonstrăm afirmația pentru $k = 1$

$$n^2 = (a^2+b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2,$$

adică $n^2 = A^2 + B^2$ cu $A = a^2 - b^2$, $B = 2ab$.

Pentru $k \geq 2$, $n^t = n^{2k-2} \cdot n^2 = n^{2(k-1)}(A^2+B^2) = (n^{k-1}A)^2 + (n^{k-1}B)^2$ cu $a^{k-1}A, a^{k-1}B \in \mathbb{N}^\star$.

Mai general, dacă n și m se pot scrie ca sumă de două pătrate perfecte nenule, atunci și produsul lor este o sumă de două pătrate perfecte nenule. Într-adevăr, dacă $n = a^2+b^2$, $m = c^2+d^2$, $a,b,c,d \in \mathbb{N}^\star$ atunci $mn = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

Putem concluziona astfel că mulțimea $M = \{n \in \mathbb{N}^\star |\ n = a^2+b^2,\ a,b \in \mathbb{N}^\star\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea.

Dacă p este un număr prim, $p \geq 3$, iar $a \in \mathbb{Z}$, $(a,p) = 1$ atunci simbolul lui Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ se definește astfel:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dacă congruența } x^2 \equiv a(\text{mod } p) \text{ are soluții} \\ -1 & \text{dacă congruența } x^2 \equiv a(\text{mod } p) \text{ nu are soluții} \end{cases}.$$

Menționăm câteva proprietăți ale simbolului lui Legendre:

1. $\left(\frac{a}{p}\right)$ se poate extinde pe $\mathbb{Z}$ prin $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, dacă $p|a$.
2. Dacă $a \equiv b(\text{mod } p)$, atunci $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.
3. În condițiile de mai sus, $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}(\text{mod } p)$ (Criteriul lui Euler).
4. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

Un rezultat de seamă în teoria numerelor este *Legea de reciprocitate pătratică*, intuită de Euler, formulată de Legendre și demonstrată de Gauss.

Teorema 1. *Fie $p \geq 3$ un număr prim. Atunci:*

1. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.
2. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.
3. *Dacă q este număr prim, $q \geq 3$ și $q \neq p$, atunci*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Rezultatele mai noi privind reprezentarea numerelor prime $p = x^2 + My^2$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$ și M liber de pătrate (rezultate ce folosesc proprietății ale simbolului lui Legendre) pot fi găsite în lucrarea [4].

Aceste rezultate sunt legate de proprietăți aritmetice profunde ale inelelor de întregi algebrici din corpurile pătratice. Ele au la bază studiul formelor pătratice binare cu coeficienți întregi realizat de Gauss în lucrarea [3].

Bibliografie

[1] V. Alexandru, N. Goșoniu, *Elemente de teoria numerelor*, Editura Universității din București, 1999.

[2] L. Panaitopol, A. Gica, *Probleme de aritmetică și teoria numerelor. Idei și metode de rezolvare*, Editura Gill, 2006.

[3] C.Fr. Gauss, *Cercetări aritmetice*, Editura Amarcord, Timișoara, 1999.

[4] D.A. Cox, *Primes of the form* $x^2 + ny^2$, Cambridge Univ. Press, 1984.

În legătură cu o inegalitate din ,,Mathematical Reflections" nr. 6/2015

Marin Chirciu [1]

În Revista ,,Mathematical Reflections" nr. 6/2015 sub semnătura Titu Andreescu, USA și Oleg Mushkarov, Bulgaria este propusă problema $O357$:

,,Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea:

$$\sum \frac{bc+4m_bm_c}{a} \geq \frac{16S}{R}."$$

Articolul își propune o generalizare și anume:

,,Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea:

$$\sum \frac{bc+k\cdot m_bm_c}{a} \geq (3k+4)\cdot \frac{S}{R},$$

unde $.k \geq 4."$

Soluție. Vom folosi inegalitățile: $a=(p-b)+(p-c)\geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$ și

$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}\geq \frac{(b+c)^2-a^2}{4}=p(p-a)\Rightarrow m_a\geq \sqrt{p(p-a)}$. Obținem:

$$\sum \frac{bc+k\cdot m_bm_c}{a}\geq \sum\left(\frac{2\sqrt{(p-a)(p-c)}\cdot 2\sqrt{(p-a)(p-b)}}{a}+\frac{k\cdot\sqrt{p(p-b)}\cdot\sqrt{p(p-c)}}{a}\right)$$

$$=\sum \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}\,[4(p-a)+kp]}{a}=\sum\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}\cdot\frac{(k+4)(b+c)+(k-4)a}{2a}\right)$$

$$\overset{A_m-G_m}{\geq}\frac{3}{2}\sqrt[3]{\prod\frac{(k+4)(b+c)+(k-4)a}{a}\cdot\prod(p-a)}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2}\sqrt[3]{(3k+4)^3\cdot\prod(p-a)}=\frac{3}{2}(3k+4)\sqrt[3]{\prod(p-a)}$$

$$\overset{G_m-H_m}{\geq}\frac{3}{2}(3k+4)\cdot\frac{3}{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}=\frac{9(3k+4)}{2}\cdot\frac{1}{\frac{r_a}{S}+\frac{r_b}{S}+\frac{r_c}{S}}$$

$$=\frac{9(3k+4)}{2}\cdot\frac{S}{r_a+r_b+r_c}=\frac{9(3k+4)}{2}\cdot\frac{S}{4R+r}$$

$$\overset{Euler}{\geq}\frac{9(3k+4)}{2}\cdot\frac{S}{\frac{9R}{2}}=(3k+4)\cdot\frac{S}{R},$$

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", Pitești, marin.chirciu@yahoo.com

unde $(1) \Leftrightarrow \prod \frac{(k+4)(b+c)+(k-4)a}{a} \geq (3k+4)^3$, care rezultă din:

$\prod \left[(k+4) \cdot \frac{b+c}{a} + k - 4\right] = \prod(x+\alpha) = (x+\alpha)(y+\alpha)(z+\alpha) = xyz + \alpha \sum xy + \alpha^2 \sum x + \alpha^3$, unde $x = (k+4) \cdot \frac{b+c}{a}$ și $\alpha = k-4$. Avem: $xyz = (k+4)^3 \prod \frac{b+c}{a} \geq 8(k+4)^3$;

$\sum xy = (k+4)^2 \sum \frac{(a+b)(a+c)}{bc}$ și $\sum \frac{(a+b)(a+c)}{bc} = \frac{p^2-r^2-Rr}{Rr} \overset{Gerretsen}{\geq} 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum xy \geq 12(k+4)^2; \sum x = (k+4) \sum \frac{b+c}{a} \geq (k+4) \cdot 6.$$

Obținem: $\prod(x+\alpha) \geq 8(k+4)^3 + 12(k+4)^2(k-4) + 6(k+4)(k-4)^2 + (k-4)^3$

$= [2(k+4) + (k-4)]^3 = (3k+4)^3$, pentru $k \geq 4$.

Din aceeași clasă de probleme vă propun să rezolvați:

„Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea:

$$\sum \frac{3bc + 4m_b m_c}{a} \geq \frac{24S}{R}.\text{„}$$

Soluție. Se folosește inegalitatea mediilor pentru $3bc$ și $4m_b m_c$, inegalitățile din soluția precedentă și inegalitatea $\sum \frac{1}{a} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral, caz în care are loc și egalitatea $3bc = 4m_b m_c$.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, O. Mushkarov, *Mathematical Reflections*, nr. 6/2015.

[2] M. Chirciu, *Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.

Coordonate analitice practice

Leonard Mihai Giugiuc [1] *și Diana Trăilescu Gogan* [2]

În general, pentru rezolvarea unor probleme de geometrie a triunghiului prin metoda analitică, punctele sunt alese astfel: $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$ cu $a>0$ si $b<c$. Inconvenientul acestei alegeri a punctelor constă în faptul că vom avea numitori nedoriți în cazul coordonatelor ortocentrului sau ale centrului cercului circumscris triunghiului.

Vom face următoarea alegere: $A(0,a)$, $B(-ab,0)$, $C(ac,0)$, unde a este distanța de la punctul A la dreapta BC, $b=\operatorname{ctg} B$, $c=\operatorname{ctg} C$. Evident $b+c>0$.

Printr-o omotetie de centru O și raport $\frac{1}{a}$ (sau $\frac{2}{a}$), putem alege $A(0,1)$, $B(-b,0)$, $C(c,0)$ sau $A(0,2)$, $B(-2b,0)$, $C(2c,0)$. În primul caz vom avea ortocentrul $H(0,bc)$, iar în cel de-al doilea caz ortocentrul $H(0,2bc)$ și centrul cercului circumscris triunghiului $O_1(c-b,1-bc)$.

Ca aplicații ale acestei metode vom prezenta în cele ce urmează soluții inedite la trei probleme date la Olimpiade Internaționale de Matematică.

Aplicația 1. *Fie H ortocentrul unui triunghi ascutitunghic ABC. Cercul centrat în mijlocul lui (BC) și care trece prin H intersectează latura BC în punctele A_1 și A_2. Analog definim punctele B_1, B_2 pe latura AC și C_1, C_2 pe latura AB.*

Demonstrați că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 și C_2 sunt conciclice.

I.M.O. 2008

Soluție. Alegem punctele $A(0,2)$, $B(-2b,0)$ și $C(2c,0)$. Cum $\triangle ABC$ este ascuțitunghic rezultă $b>0$, $c>0$ și $bc<1$. Evident, $H(0,2bc)$ și centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ este $O_1(c-b,\ 1-bc)$. Din modul de definire a punctelor A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, obținem că mediatoarea lui $[BC]$ coincide cu mediatoarea lui $[A_1A_2]$ și analog celelalte. Deci e suficient să arătăm că O_1 este egal depărtat de cele șase puncte. De asemenea, există numerele reale strict pozitive m, n, p cu:

$$A_1(c-b-m,0),\ A_2(c-b+m,0);\ B_1(c(1-n),1+n),$$

$$B_2(c(1+n),\ 1-n),\ C_1(-b(1-p),1+p)\ \text{ și }\ C_2(-b(1+p),1-p).$$

Deci:

$$O_1A_1=O_1A_2,\ O_1B_1=O_1B_2 \text{ și } O_1C_1=O_1C_2. \tag{1}$$

Din ipoteză, avem $\triangle HA_1A_2$ dreptunghic în H. Rezultă $\overrightarrow{HA_1}\cdot\overrightarrow{HA_2}=0\Rightarrow$

$$\left[(c-b-m)\vec{i}-2bc\vec{j}\right]\left[(c-b+m)\vec{i}-2bc\vec{j}\right]=0$$

$$\Rightarrow (c-b-m)(c-b+m)+4b^2c^2=0\Rightarrow m^2=4b^2c^2+b^2+c^2-2bc.$$

[1]Profesor, Colegiul Național,,Traian", Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com
[2]Profesor, Liceul Tehnologic Hălânga, dianaveronica80@yahoo.com

$\triangle HB_1B_2$ dreptunghic în $H \Rightarrow \overrightarrow{HB_1} \cdot \overrightarrow{HB_2} = 0 \Rightarrow$

$$\left[c\left(1-n\right)\vec{i}+\left(1+n-2bc\right)\cdot\vec{j}\right]\cdot\left[c\left(1+n\right)\cdot\vec{i}+\left(1-n-2bc\right)\vec{j}\right]=0$$

$$\Rightarrow n^2=\frac{4b^2c^2+c^2+1-4bc}{1+c^2}.$$

$\triangle HC_1C_2$ dreptunghic în $H \Rightarrow \overrightarrow{HC_1} \cdot \overrightarrow{HC_2} = 0 \Rightarrow$

$$\left[-b\left(1-p\right)\vec{i}+\left(1+p-2bc\right)\cdot\vec{j}\right]\cdot\left[-b\left(1+p\right)\vec{i}+\left(1-p-2bc\right)\cdot\vec{j}\right]=0$$

$$\Rightarrow p^2=\frac{4b^2c^2+b^2+1-4bc}{1+b^2}.$$

$$O_1{A_1}^2=m^2+\left(1-bc\right)^2=5b^2c^2+b^2+c^2+1-4bc.$$

$$O_1{B_1}^2=\left(b-cn\right)^2+\left(bc+n\right)^2=5b^2c^2+b^2+c^2+1-4bc.$$

$$O_1{C_1}^2=\left(c+bp\right)^2+\left(bc-p\right)^2=5b^2c^2+b^2+c^2+1-4bc.$$

Deci

$$O_1A_1=O_1B_1=O_1C_1. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) obținem că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 și C_2 sunt conciclice.

Aplicația 2. *Considerăm $\triangle ABC$ ascutitunghic. Fie P piciorul înălțimii din A, O centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Presupunem că $B+30^\circ \leq C$. Demonstrați că $A+m\left(\widehat{COP}\right)<90^\circ$.*

I.M.O. 2001

Soluție. Considerăm in s.c.c.o. xPy, punctele $A\left(0,2\right)$, $B\left(-2b,0\right)$, $C\left(2c,0\right)$. Cum $\triangle ABC$ este ascutitunghic $\Rightarrow b,c>0$ și $b\cdot c<1$. De asemenea, cum $B<C \Rightarrow b>c$.

$$A+m\left(\widehat{COP}\right)<90^\circ \Leftrightarrow \text{ctg}\left(A+m\left(\widehat{COP}\right)\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \text{ctg}\ A\cdot\text{ctg}\left(\widehat{COP}\right)>1.$$

Avem:

$$\text{ctg}\ A=-\text{ctg}\left(B+C\right)=\frac{1-bc}{b+c},$$

$\text{ctg}\left(\widehat{COP}\right)=\text{ctg}\left(\widehat{COM}-\widehat{POM}\right)$, unde M este mijlocul lui (BC).

Notăm c.c. al $\triangle ABC$ cu w. Avem:

$$w:\left[x-\left(c-b\right)\right]^2+\left[y-\left(1-bc\right)\right]^2=\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right).$$

În $\triangle COM$, $\text{ctg}\left(\widehat{COM}\right)=\dfrac{OM}{CM}=\dfrac{1-bc}{b+c}$.

În $\triangle POM$, $\text{ctg}\left(\widehat{POM}\right)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{1-bc}{b-c}$.

$$\text{Deci, ctg}\left(\widehat{COP}\right)=\frac{\frac{1-bc}{b+c}\cdot\frac{1-bc}{b-c}+1}{\frac{1-bc}{b-c}-\frac{1-bc}{b+c}}=\frac{(1-bc)^2+b^2-c^2}{2c\cdot(1-bc)}.$$

$$\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}\left(\widehat{COP}\right)>1\ \Leftrightarrow\frac{1-bc}{b+c}\cdot\frac{(1-bc)^2+b^2-c^2}{2c\,(1-bc)}>1$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-bc)^2+b^2-c^2}{2c\,(b+c)}>1\Leftrightarrow\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)>4c\,(b+c)\Leftrightarrow R^2>4c\,(b+c)\,,$$

unde R este raza lui w.

În $\triangle PAC$, $PC=AC\cos C=2R\sin B\cos C\Rightarrow 2c=2R\sin B\cos C\Rightarrow c=R\sin B\cos C$.

Aplicând teorema sinusurilor in $\triangle ABC$, avem $BC=2R\sin A\Rightarrow 2\,(b+c)=2R\sin A\Rightarrow b+c=R\sin A$. Deci avem de arătat că

$$R^2>4R^2\sin A\sin B\cos C\Leftrightarrow\sin A\sin B\cos C<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\sin A\left[\sin(B+C)-\sin(C-B)\right]<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin A\left(\sin A-\sin(C-B)\right)<\frac{1}{2}.$$

Cum $C-B$ este unghi ascutit si $C-B\geq 30^\circ\Rightarrow\sin(C-B)\geq\frac{1}{2}\Rightarrow-\sin(C-B)\leq-\frac{1}{2}$.

Este suficient să arătăm că

$$\sin A\left(\sin A-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\sin A-1)\,(2\sin A+1)<0. \tag{3}$$

Cum $A<90^\circ\Rightarrow\sin A-1<0\Rightarrow$ inegalitatea (3) este adevarată, deci concluzia problemei este adevărată.

Aplicația 3. *Un $\triangle ABC$ si un punct D din planul său satisfac relația* $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{CA}{BD}=\dfrac{AB}{CD}=\sqrt{3}$.

Demonstrați că $\triangle ABC$ este echilateral și D este centrul său.

I.M.O. 1980-Luxembourg

Soluție. Alegem $A\,(0,1)$, $B\,(-b,0)$, $C\,(c,0)$ și $D\,(x,y)$.

Avem: $BC^2=(b+c)^2$, $CA^2=1+c^2$, $AB^2=1+b^2$, $AD^2=x^2+(y-1)^2$, $BD^2=(x+b)^2+y^2$ și $CD^2=(x-c)^2+y^2$. Deci condițiile din ipoteză devin:

$$b^2+2bc+c^2=3x^2+3y^2+3-6y, \tag{4}$$

$$1+c^2=3x^2+3y^2+3b^2+6bx \tag{5}$$

și

$$1+b^2=3x^2+3y^2+3c^2-6cx. \tag{6}$$

Scăzând din relația (5) relația (6) obținem $4\,(c^2-b^2)=6x\,(c+b)\Rightarrow x=\dfrac{2\,(c-b)}{3}$. Scăzând din relația (5) relația (4), obținem $y=\dfrac{2-3bc}{3}$. Înlocuind valorile x și y găsite în relația (4), avem:

$$b^2+c^2+2bc=\frac{4b^2+4c^2+9b^2c^2+4-20bc}{3}+3-4+6bc$$

$$\Rightarrow 3b^2+3c^2+6bc=4b^2+4c^2+9b^2c^2+4-20bc-3+18bc$$

$$\Rightarrow b^2+c^2-2bc+9b^2c^2-6bc+1=0 \Rightarrow (b-c)^2+(3bc-1)^2=0 \Rightarrow b-c=0$$

și $3bc-1=0 \Rightarrow \operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} C \Rightarrow B=C$ și $3\operatorname{ctg}^2 B=1 \Rightarrow \operatorname{ctg} B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (deoarece triunghiul nu poate avea două unghiuri obtuze) $\Rightarrow B=C=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \triangle ABC$ este echilateral. $D\left(0,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow D$ este centrul $\triangle ABC$.

În încheiere vom propune spre rezolvare trei probleme de geometria triunghiului prin metoda de mai sus, ale căror enunțuri pot fi găsite la adresele web următoare:

static.olimpiade.ro/uploads/attach_data/32/51/5/2013_matematica_internationala_subiecte.pdf

ssmr.ro/files/onm2013/faza_nationala/subiecte/subiecte_juniori.pdf

Asupra unei probleme propuse la Olimpiada Națională de Matematică

Marin Ionescu [1]

La Olimpiada Națională de Matematică din 2017, domnul profesor Lucian Dragomir din Oțelu Roșu a propus elevilor de clasa a X-a următoarea problemă:

Problema 1. Demonstrați inegalitatea:

$$\sin\frac{\pi}{4n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2n},$$

unde n este un număr natural nenul [1].

În cele ce urmează vom da o soluție diferită de cea propusă de Comisia Centrală.

Inegalitatea din enunț este o consecință a următorului rezultat.

Propoziție. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$ și $x \in \mathbb{R}$, există inegalitatea*

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, inegalitatea este verificată. Presupunem inegalitatea adevărată pentru n și demonstrăm că este adevărată pentru $n + 1$.

Avem:

$$|\sin(n+1)x| = |\sin nx\cos x + \sin x\cos nx| \leq |\sin nx\cos x| + |\sin x\cos nx|$$

$$= |\sin nx|\cdot|\cos x| + |\sin x|\cdot|\cos nx| \leq |\sin nx| + |\sin x| \leq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)\cdot|\sin x|.$$

□

Cu propoziția de mai sus, inegalitatea dată la concurs rezultă astfel:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \left|\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4n}\right)\right| \leq n\cdot\left|\sin\frac{\pi}{4n}\right| = n\cdot\sin\frac{\pi}{4n}$$

și de aici obținem $\dfrac{\sqrt{2}}{2n} \leq \sin\dfrac{\pi}{4n}$.

În G.M. 10/2017 domnul profesor Traian Preda din București a propus la clasa a X-a următoarea problemă:

Problema 2. (27437) Să se demonstreze inegalitatea $\sin\dfrac{\pi}{mn} \geq \dfrac{1}{m}\sin\dfrac{\pi}{n}$, unde m și n sunt numere naturale nenule.

[1]Profesor, Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, marin.ionescu61@gmail.com

Cu propoziția de mai sus, soluția este imediată:

$$\sin\frac{\pi}{n}=\sin\left(m\cdot\frac{\pi}{mn}\right)=\left|\sin\left(m\cdot\frac{\pi}{mn}\right)\right|\leq m\cdot\left|\sin\frac{\pi}{mn}\right|=m\cdot\sin\frac{\pi}{mn}$$

și de aici obținem

$$\sin\frac{\pi}{mn}\geq\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Bibliografie

[1] A 68-a Olimpiadă Națională de Matematică, 19-23 aprilie 2017, Timișoara.

[2] Colecția Gazetei Matematice, Seria B.

Probleme de calcul integral. Inegalități integrale I

Florin Stănescu [1]

Scopul acestei note este familiarizarea cititorului cu problemele de calcul integral, urmărindu-se în special rezolvarea de aplicații din sfera inegalităților integrale. În final, pentru pasionați, am propus un test.

Funcții pozitive. Funcții monotone. Funcții convexe

- Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă și $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.
- Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții integrabile cu proprietatea că $f(x)\leq g(x)\ x\in[a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$.
- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci $|f|$ este integrabilă și

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

- **Inegalitatea lui *Cebâșev***:

  Fie $f,g:[a,b]\to R$ două funcții având aceeași monotonie, iar $p:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție integrabilă. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right)\geq\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right).$$

  În cazul când f și g sunt de monotonii diferite, avem:

$$\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right)\leq\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right).$$

  Punând $p(x)=1,(\forall)x\in[a,b]$, obținem:

  a) $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\geq\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$, dacă f și g au aceeași monotonie;

  b) $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$, dacă f și g sunt de monotonii diferite.

  Egalitatea are loc dacă una din funcțiile f,g este constantă (cu excepția, eventual, a unei mulțimi numărabile).

- Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este o funcție convexă și $x,y,z\in I$ astfel încât $x<y<z$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

[1]Profesor, Școala Gimnazială „Șerban Cioculescu”, Găești, florin.florinstanescu@yahoo.com

Aplicații

1. Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(a)=f(b)=0$. Arătați că are loc inegalitatea:
$$\max_{a\le t\le b} f(t)\le \frac{1}{2}\cdot\int_a^b |f'(x)|\,dx.$$
Soluție. Avem $|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|$ și $|f(x)|=\left|\int_x^b f'(t)\,dt\right|$, deci $2|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|+\left|\int_x^b f'(t)\,dt\right|\le\int_a^x |f'(t)|\,dt+\int_x^b |f'(t)|\,dt=\int_a^b |f'(x)|\,dx,(\forall)\,x\in[a,b]$. Astfel, $\max\limits_{a\le t\le b} f(t)\le \frac{1}{2}\cdot\int_a^b |f'(x)|\,dx$.
2. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu f' continuă pe $[a,b]$, demonstrați inegalitatea:
$$0\le\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b |f(x)|\,dx-\left|\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\frac{b-a}{3}\cdot\max_{a\le x\le b}|f'(x)|.$$
Soluție. Avem $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$, deci $0\le\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b |f(x)|\,dx-\left|\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\right|$. Mai departe, vom calcula:
$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^x (t-a)f'(t)\,dt-\int_x^b (b-t)f'(x)\,dt$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx+(x-a)f(x)-\int_a^x f(x)\,dx+(b-x)f(x)-\int_x^b f(x)\,dx=(b-a)f(x),$$
de unde obținem că
$$|(b-a)f(x)|=\left|\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^x (t-a)f'(t)\,dt-\int_x^b (b-t)f'(x)\,dt\right|$$
$$\le\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\int_a^x (t-a)|f'(t)|\,dt+\int_x^b (b-t)|f'(t)|\,dt.$$
Rezultă
$$(b-a)\cdot\int_a^b |f(x)|\,dx-(b-a)\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\le\int_a^b\left(\int_a^x (t-a)|f'(t)|\,dt\right)dx+\int_a^b\left(\int_x^b (b-t)|f'(t)|\,dt\right)dx$$
$$\le\frac{(b-a)^3}{3}\cdot\max_{a\le x\le b}|f'(x)|,$$
ceea ce încheie demonstrația.
3. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă. Să se arate că:
$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$
Soluție. Avem: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b (x-a)'f(x)\,dx=(b-a)f(b)-\int_a^b (x-a)f'(x)\,dx$, iar din teorema de medie există $c_1\in(a,b)$ astfel încât $\int_a^b (x-a)f'(x)\,dx=f'(c_1)\cdot\int_a^b (x-a)\,dx=f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{2}$, de unde $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(b)-f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{2}$. În mod analog, există $c_2\in(a,b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(a)+f'(c_2)\frac{(b-a)^2}{2}$.

Astfel, inegalitatea de demonstrat rezultă din:

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{8}-\left(b-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.$$

$$\left.-f'(c_2)\frac{(b-a)^2}{8}\right|=\frac{(b-a)^2}{8}\left|f'(c_1)+f'(c_2)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|.$$

4. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție integrabilă. Arătați că:

$$\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx\leq\int_0^1 f^3(x)\,dx.$$

Soluție. Din *inegalitatea lui Schur* de gradul al III-lea, avem:

$$f^3(x)+f^3(y)+f^3(z)+3f(x)f(y)f(z)\geq f^2(x)f(y)+f^2(y)f(x)$$
$$+f^2(y)f(z)+f^2(z)f(y)+f^2(z)f(x)+f^2(z)f(y),$$

$(\forall)\,x,y,z\in[0,\infty)$, de unde prin integrare în funcție de cele trei variabile, obținem

$$3\int_0^1 f^3(x)\,dx+3\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3\geq 6\int_0^1 f^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\underset{\text{Jensen}}{\Rightarrow}6\int_0^1 f^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx\leq 6\int_0^1 f^3(x)\,dx,$$

ceea ce încheie demonstrația.

5. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție integrabilă pe orice interval $[0,a],a>0$, astfel incât $f(x)\leq\frac{1}{x^2}$ și $\int_0^x\left[f\left(\frac{t}{2}\right)-f(t)\right]dt\leq 1,(\forall)\,x\in(0,\infty)$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x)\,dx\leq 1.$$

Soluție. Relația din enunț poate fi scrisă sub forma

$$\int_0^{\frac{x}{2}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}\left(1+\int_0^x f(t)\,dt\right),(\forall)\,x>0$$

$$\Rightarrow\int_0^x f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}\left(1+\int_0^{2x} f(t)\,dt\right),$$

iar prin inducție obținem că

$$\int_0^x f(t)\,dt\leq\frac{1}{2^n}\left(2^n-1+\int_0^{2^n x} f(t)\,dt\right),(\forall)\,n\geq 1.$$

Acum, pentru $a>1$, putem scrie:

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^a f(x)\,dx\leq\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^a\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx+1-\frac{1}{a}<1+\int_0^1 f(x)\,dx:=A.$$

În continuare,

$$\int_0^x f(t)\,dt\leq\frac{1}{2^n}\left(2^n-1+\int_0^{2^n x} f(t)\,dt\right)$$

$$\leq\frac{A+2^n-1}{2^n}\underset{n\to\infty}{\to}1,(\forall)\,x>0\Rightarrow\int_0^1 f(t)\,dt\leq 1.$$

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a > 0$, $2a + 3b = 6$ și $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ descrescătoare. Să se arate că: $\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 (ax^2 + bx) f(x)\,dx$.

   Soluție. Notăm $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx - 1$. Ecuația $g(x) = 0$ are o unică soluție α in intervalul $(0,1)$.

   Rezultă $g(x) \leq 0, (\forall)\, x \in [0,\alpha]$ și $g(x) \geq 0, (\forall)\, x \in [\alpha,1]$. Cum f este descrescătoare, obținem

$$g(x)(f(x) - f(\alpha)) \leq 0, (\forall)\, x \in [0,\alpha]$$

   și

$$g(x)(f(\alpha) - f(x)) \geq 0, (\forall)\, x \in [\alpha,1]$$

$$\Rightarrow g(x)(f(x) - f(\alpha)) \leq 0, (\forall)\, x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \leq 0.$$

7. Dacă $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă și integrabilă, atunci are loc inegalitatea:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx \geq 0.$$

   Soluție. Putem scrie:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos x dx.$$

   Pentru ultima integrală făcând substituția $x = t + \pi$, rezultă că

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos x dx = -\int_0^{\pi} f(x+\pi) \cos x dx,$$

   de unde

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x\,(f(x) - f(x+\pi))\,dx.$$

   Acum, pentru $x, y \in [0,\pi], x < y$, deci $x < y < x + \pi < y + \pi$, obținem că

$$\frac{f(y+\pi) - f(x+\pi)}{y - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\Rightarrow f(y) - f(y+\pi) \leq f(x) - f(x+\pi).$$

   Astfel, funcția $f(x) - f(x+\pi), x \in [0,\pi]$ este descrescătoare.

   În final, cum și $\cos x$ este descrescătoare pe $[0,\pi]$, aplicând inegalitatea lui *Cebâșev,* avem

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x\,(f(x) - f(x+\pi))\,dx$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos x dx\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} (f(x) - f(x+\pi))\,dx\right) = 0.$$

8. Presupunem că $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, cu f' continuă, astfel încât $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Pentru $\alpha \in (0,1)$ demonstrați inegalitatea:

$$\left|\int_0^{\alpha} f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{8} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Soluție. Considerăm funcția derivabilă de două ori

$$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+M\cdot\frac{x^2}{2},$$

unde $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$. Avem $g''(x)=f'(x)+M\geq 0,(\forall)\,x\in[0,1]$, deci g este convexă pe $[0,1]$. Folosind că g este convexă, putem scrie:

$$g(\alpha)=g((1-\alpha)\cdot 0+\alpha\cdot 1)\leq(1-\alpha)\,g(0)+\alpha g(1)$$

$$\Rightarrow\int_0^\alpha f(x)\,dx+\frac{\alpha^2}{2}M\leq\frac{\alpha}{2}M\Rightarrow\int_0^\alpha f(x)\,dx=\frac{M}{2}\alpha(1-\alpha)\leq\frac{M}{2}\left(\frac{1-\alpha+\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{8}M.$$

În final, înlocuind pe f cu $-f$, obținem că $-\int_0^\alpha f(x)\,dx\leq\frac{1}{8}M$, deci

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right|\leq\frac{1}{8}\cdot\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

9. Dacă h este o funcție pozitivă și descrescătoare pe $[0,1]$, atunci:

$$\frac{\int_0^1 xh^2(x)\,dx}{\int_0^1 xh(x)\,dx}\leq\frac{\int_0^1 h^2(x)\,dx}{\int_0^1 h(x)\,dx}.$$

Soluție. În inegalitatea lui *Cebâșev,* pentru $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{h(x)}, p(x)=h^2(x)$, obținem:

$$\left(\int_0^1 h^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^1 h^2(x)\cdot x\cdot\frac{1}{h(x)}dx\right)\geq\left(\int_a^b h^2(x)\cdot xdx\right)\left(\int_a^b h^2(x)\frac{1}{h(x)}dx\right)$$

$$\Rightarrow\left(\int_0^1 h^2(x)dx\right)\cdot\int_0^1 x\cdot h(x)\,dx\geq\left(\int_a^b h^2(x)\cdot xdx\right)\left(\int_a^b h(x)dx\right).$$

10. Considerăm $P\in\mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n\geq 2$ cu coeficienți strict pozitivi și $0\leq a<b$. Dacă P are numai rădăcini reale, demonstrați că:

$$(b-a)\int_a^b\frac{P''(x)}{P(x)}dx>\ln\frac{P(a)}{P(b)}\cdot\ln\frac{P'(a)}{P'(b)}.$$

Soluție. Dacă $x_1,x_2,...,x_n$ sunt rădăcinile polinomului P, din enunț deducem că ele sunt strict negative. Mai avem că

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+...+\frac{1}{x-x_n},(\forall)x\geq 0.$$

Derivând, obținem:

$$\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)'=-\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+...+\frac{1}{(x-x_n)^2}\right)<0.$$

În continuare, construind funcția $\phi:[0,\infty)\to\mathbb{R},\phi(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$, rezultă că ϕ este strict descrescătoare. Deoarece P' are numai rădăcini reale strict negative, analog, obținem că funcția $\psi:[0,\infty)\to\mathbb{R},\psi(x)=\frac{P''(x)}{P'(x)}$ este strict descrescătoare, deci funcțiile ϕ și ψ au aceeași monotonie si nu sunt constante.

Dacă $0\leq a<b$, putem scrie:

$$\int_a^b\frac{P''(x)}{P(x)}dx=\int_a^b\phi(x)\cdot\psi(x)dx>\frac{1}{b-a}\int_a^b\phi(x)dx\cdot\int_a^b\psi(x)dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{P'(x)}{P(x)}dx\cdot\int_a^b\frac{P''(x)}{P'(x)}dx=\frac{1}{b-a}\ln\frac{P(b)}{P(a)}\cdot\ln\frac{P'(b)}{P'(a)}.$$

Test

1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă și există $a\in(0,1]$ astfel încât $\int_0^a f(x)\,dx=0$, să se arate că $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leq\frac{1-a}{2}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$.
2. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție crescătoare, demonstrați inegalitățile:
$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx\leq\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx\leq\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx,(\forall)\,n\in\mathrm{N}^*.$$
3. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, cu f' integrabilă și $\int_0^1 f(x)\,dx=0$, demonstrați inegalitatea:
$$\int_0^1\left(1-x^2\right)\left(f'(x)\right)^2dx\geq 24\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2.$$
4. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, este o funcție integrabilă, cuf' integrabilă și $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, arătați că are loc inegalitatea:
$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\leq\frac{1}{12}\cdot\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.$$
5. Fie $a,b>0$. Demonstrați că:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\leq\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{\sin x^2}{a}+\frac{\cos x^2}{b}\right)dx\leq\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}.$$

Bibliografie

[1] M. Andronache, R. Gologan, D. Schwarz, D. Șerbănescu, *Olimipiada de matematică 2006-2010*, Ed. Sigma, București, 2010.

[2] M.O. Drimbe, *Inegalități, idei și metode*, Ed. Gil, Zalău, 2003.

[3] L.G. Lăduncă, *Borne pentru matematicieni, Algebră-Analiză, clasele IX-XII*, Ed. Taida, Iași, 2010.

[4] C. Mortici, *Bazele Matematicii. Teorie și exerciții*, Ed. Paralela 45, Pitești, 2016.

[5] N. Mușuroaia, Gh. Boroaica, *Analiză Matemtică pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, Clasa a XII-a,* Ed. Paralela 45, Pitești, 2014.

[6] F. Stănescu, *Inegalități integrale:de la inițiere la performanță*, Ed. Paralela 45, Pitești, 2015.

[7] R.T. Rockafeller, *Analiză convexă*, Ed. Theta, București, 2002.

[8] Colecția Gazetei Matematice, Seria B.

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Optimalitatea algoritmului de căutare binară

Costel Bălcău [1]

În acest articol vom demonstra că algoritmul de căutare binară este optim. Pentru aceasta vom prezenta și utiliza câteva noțiuni și rezultate de bază din teoria algoritmilor: ordine de complexitate, Teorema Master, proprietăți ale arborilor binari stricți.

Ordine de complexitate

Timpul de execuție al unui algoritm depinde, în general, de setul datelor de intrare, iar pentru fiecare astfel de set el este bine determinat de numărul de operații executate și de tipul acestora. Astfel timpul de execuție al unui algoritm poate fi interpretat și analizat drept o funcție pozitivă ce are ca argument dimensiunea datelor de intrare.

Definiția 1. *Pentru orice algoritm $\mathcal{A}$, notăm cu $T_{\mathcal{A}}(n)$ **timpul de execuție** pentru algoritmul $\mathcal{A}$ corespunzător unui set de date de intrare având dimensiunea totală n.*

Definiția 2. *Un algoritm $\mathcal{A}$ este considerat **optim** dacă (se demonstrează că) nu există un algoritm având un timp de execuție mai bun pentru rezolvarea problemei date, adică pentru orice algoritm $\mathcal{A}'$ care rezolvă problema dată avem $T_{\mathcal{A}}(n) \leq T_{\mathcal{A}'}(n)$, pentru orice n.*

Obținerea de algoritmi pur optimi - în sensul definiției anterioare - este posibilă în puține situații, iar demonstrarea optimalității acestora este de obicei dificilă. Mult mai des se întâlnesc algoritmi cu o comportare apropiată de cea optimă, pentru valori suficient de mari ale dimensiunii setului datelor de intrare. Prezentăm în continuare câteva noțiuni prin care se cuantifică această apropiere.

Definiția 3. *Fie $f, g : \mathbb{N} \setminus A \to \mathbb{R}_+$ două funcții, unde A este o mulțime finită, $A \subset \mathbb{N}$.*

*a) f și g se numesc **asimptotic echivalente** și notăm $f(n) \sim g(n)$ dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$.*

*b) Spunem că f este **asimptotic mărginită superior** de g, iar g este **asimptotic mărginită inferior** de f și notăm $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ și $g(n) = \Omega(f(n))$ dacă $\exists\, c > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(n) \leq c \cdot g(n)$, $\forall\, n \geq n_0$.*

*c) Spunem că f și g **au același ordin de creștere** și notăm $f(n) = \Theta(g(n))$ dacă $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ și $f(n) = \Omega(g(n))$.*

Următorul rezultat este o consecință imediată a definiției anterioare.

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

Propoziția 1. *Fie $f, g : \mathbb{N} \setminus A \to \mathbb{R}_+$ două funcții, unde A este o mulțime finită, $A \subset \mathbb{N}$. Presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = L$. Atunci:*

a) $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ dacă și numai dacă $L \in [0, +\infty)$;

b) $f(n) = \Omega(g(n))$ dacă și numai dacă $L \in (0, +\infty]$;

c) $f(n) = \Theta(g(n))$ dacă și numai dacă $L \in (0, +\infty)$.

Corolarul 1. *Fie $f, g : \mathbb{N} \setminus A \to \mathbb{R}_+$ două funcții, unde A este o mulțime finită, $A \subset \mathbb{N}$. Dacă $f(n) \sim g(n)$, atunci $f(n) = \Theta(g(n))$.*

Definiția 4. *Fie $\mathcal{A}$ un algoritm și $f : \mathbb{N}\setminus A \to \mathbb{R}_+$ o funcție, unde A este o mulțime finită, $A \subset \mathbb{N}$. Spunem că algoritmul $\mathcal{A}$ are **ordinul de complexitate** (**complexitatea**) $\mathcal{O}(f(n))$, $\Omega(f(n))$, respectiv $\Theta(f(n))$ dacă $T_{\mathcal{A}}(n) = \mathcal{O}(f(n))$, $T_{\mathcal{A}}(n) = \Omega(f(n))$, respectiv $T_{\mathcal{A}}(n) = \Theta(f(n))$.*

Observația 1. Notația $\mathcal{O}$ se utilizează pentru a exprima complexitatea unui algoritm corespunzătoare *timpului de execuție în cazul cel mai defavorabil*, fiind astfel cea mai adecvată analizei algoritmilor. Notația Ω este corespunzătoare *timpului de execuție în cazul cel mai favorabil*, caz practic irelevant, fiind astfel mai puțin utilizată. Notațiile $\sim$ și Θ se utilizează atunci când se constată că timpii de execuție corespunzători cazurilor cel mai defavorabil și cel mai favorabil fie sunt chiar asimptotic echivalenți (notația $\sim$, deci și notația Θ), cazul cel mai simplu fiind acela al algoritmilor a căror executare depinde doar de dimensiunea setului de date de intrare, nu și de valorile acestor date, fie au măcar același ordin de creștere (notația Θ). Tot aceste notații se utilizează și atunci când se poate determina *timpul mediu de execuție* al algoritmului, calculat ca medie aritmetică ponderată a timpilor de execuție pentru toate seturile de date de intrare posibile, ponderile fiind frecvențele de apariție ale acestor seturi.

Definiția 5. *Un algoritm $\mathcal{A}$ este considerat **asimptotic-optim** dacă (se demonstrează că) nu există un algoritm având un ordin de complexitate mai bun pentru rezolvarea problemei date, adică pentru orice algoritm $\mathcal{A}'$ care rezolvă problema dată avem $T_{\mathcal{A}}(n) = \mathcal{O}(T_{\mathcal{A}'}(n))$.*

Evident, orice algoritm optim este asimptotic-optim. Reciproca acestei afirmații nu este adevărată, în continuare fiind prezentat un exemplu în acest sens.

Exemplul 1. Considerăm problema determinării maximului și minimului dintre elementele unui vector dat $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 1$, adică se cere să se determine perechea (M, m), unde $M = \max\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $m = \min\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Un algoritm uzual de rezolvare este următorul.

MAX-MIN(A, n, M, m)**:**
$M \leftarrow a_1$; $m \leftarrow a_1$;
for $i = \overline{2, n}$ **do**
  if $a_i > M$ **then**
    $M \leftarrow a_i$;
  else
    if $a_i < m$ **then**
      $m \leftarrow a_i$;

Pentru evaluarea complexității algoritmilor care rezolvă problema dată, vom analiza numai comparațiile în care intervin elemente ale vectorului sau valorile M și m, numite *comparații de chei*.

Evident, algoritmul MAX-MIN efectuează cel puțin $n-1$ și cel mult $2n-2$ astfel de comparații (iar celelalte operații nu depășesc ordinul de creștere al acestora), deci are complexitatea $\Theta(n)$.

Se poate demonstra ușor prin inducție că orice algoritm $\mathcal{A}$ care calculează maximul dintre n elemente, bazat pe comparații de chei, necesită cel puțin $n-1$ astfel de comparații, deci are complexitatea $\Omega(n)$. Astfel $T_{\mathcal{A}}(n) = \Omega(T_{\text{MAX-MIN}}(n))$, sau, echivalent, $T_{\text{MAX-MIN}}(n) = \mathcal{O}(T_{\mathcal{A}}(n))$, deci algoritmul MAX-MIN este asimptotic-optim (în clasa algoritmilor bazați pe comparații de chei). Pe de altă parte, el nu este optim, din punct de vedere al timpului de execuție în cazul cel mai defavorabil, deoarece există algoritmi (bazați pe comparații de chei) care în cazul cel mai defavorabil efectuează mai puțin de $2n-2$ comparații de chei, cât efectuează algoritmul MAX-MIN. Un astfel de exemplu este următorul algoritm, ce compară a_1 cu a_2, a_3 cu a_4, ..., și calculează maximul dintre maximele acestor perechi și minimul dintre minimele perechilor.

MAX-MIN-PER(A, n, M, m)**:**
$M \leftarrow a_n$; $m \leftarrow a_n$;
for $i = \overline{1, \lfloor n/2 \rfloor}$ **do**
  if $a_{2i-1} > a_{2i}$ **then**
    if $a_{2i-1} > M$ **then**
      $M \leftarrow a_{2i-1}$;
    if $a_{2i} < m$ **then**
      $m \leftarrow a_{2i}$;
  else
    if $a_{2i} > M$ **then**
      $M \leftarrow a_{2i}$;
    if $a_{2i-1} < m$ **then**
      $m \leftarrow a_{2i-1}$;

($\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x). Evident, algoritmul MAX-MIN-PER efectuează exact $3 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ comparații de chei, indiferent de ordinea dintre elementele vectorului A (iar celelalte operații nu depășesc ordinul de creștere al acestora), deci are complexitatea $\Theta(n)$.

Teorema Master

Prezentăm un rezultat celebru, deosebit de util în determinarea complexității algoritmilor specifici metodei de programare *Divide et Impera* și nu numai.

Considerăm o relație de recurență de forma

$$T(n) = \underbrace{T(n/b) + \ldots + T(n/b)}_{a \text{ termeni}} + f(n),\ \forall\, n > n_0,$$

unde $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$ și, prin convenție, fiecare termen n/b reprezintă fie $\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$, fie $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$.

Menționăm că $\lceil x \rceil = \min\{k \mid k \in \mathbb{Z},\ k \geq x\}$ reprezintă aproximarea întreagă prin adaos a numărului real x, numită și *partea întreagă superioară* a lui x. În acest context, partea întreagă uzuală, $\lfloor x \rfloor$ (notată de obicei cu $[x]$), se numește și *partea întreagă inferioară* a lui x.

Prin abuz de notația de înmulțire, această relație de recurență este convențional rescrisă prescurtat sub forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),\ \forall\, n > n_0. \tag{1}$$

Următorul rezultat prezintă o metodă generală pentru rezolvarea acestei relații de recurență.

Teorema 1 (**Teorema Master** [3]). *Fie $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ o funcție ce verifică relația de recurență (1), sub ipotezele și convențiile de mai sus.*

Cazul 1. Dacă $f(n) = \mathcal{O}(n^c)$, cu $c < \log_b a$, atunci $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

Cazul 2. Dacă $f(n) = \Theta(n^c \log_2^k n)$, cu $c = \log_b a$ și $k \geq 0$, atunci $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2^{k+1} n)$.

Cazul 3. Dacă $f(n) = \Omega(n^c)$, cu $c > \log_b a$, și există $k < 1$ și $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $af(n/b) \leq kf(n)\ \forall n \geq n_1$, atunci $T(n) = \Theta(f(n))$.

Proprietăți ale arborilor binari stricți

Deoarece terminologia în tematica arborilor nu este unificată, definim noțiunile pe care le vom utiliza în continuare.

Definiția 6. *Un **arbore binar** este un arbore cu rădăcină, reprezentat pe nivele, în care fiecare nod x are cel mult doi **descendenți** (**fii**, succesori direcți), situați pe nivelul următor, și anume (cel mult) un **descendent stâng**, situat în stânga lui x, și (cel mult) un **descendent drept**, situat în dreapta lui x, contând ordinea dintre aceștia. Nodurile cu cel puțin un descendent se numesc **interne** (**interioare**), iar nodurile fără descendenți se numesc **externe** (**exterioare**, **frunze**).*

Definiția 7. *Fie $T = (V, F)$ un arbore binar având rădăcina r, $r \in V$.*

*a) Notăm cu $I(T)$ **mulțimea nodurilor interne** și cu $E(T)$ **mulțimea nodurilor externe** ale arborelui binar T.*

*b) Pentru orice nod $x \in V$, **distanța de la nodul rădăcină** r **la nodul** x, notată cu $D_T(x) = D(x)$, reprezintă lungimea lanțului elementar unic de la r la x.*

*c) Numărul $h(T) = \max\{D_T(x) \mid x \in V\}$ se numește **înălțimea arborelui binar** T.*

Observația 2. Fie $T = (V, F)$ un arbore binar. Evident, avem $V = I(T) \cup E(T)$, $I(T) \cap E(T) = \emptyset$, $E(T) \neq \emptyset$ și $h(T) = \max\{D_T(x) \mid x \in E(T)\}$. Deci $h(T) = k - 1$, unde k reprezintă numărul de nivele ale arborelui T.

Dacă nivelul pe care este reprezentată rădăcina arborelui este numerotat cu 0, atunci pentru orice nod $x \in V$ avem $D_T(x) =$ numărul nivelului pe care este situat nodul x, iar înălțimea arborelui T este egală cu numărul ultimului nivel al arborelui.

Definiția 8. *Un **arbore binar strict** este un arbore binar pentru care orice nod intern are exact doi descendenți (și anume un descendent stâng și un descendent drept).*

Propoziția 2. *Orice arbore binar strict cu n noduri interne, $n \in \mathbb{N}$, are $n + 1$ noduri externe.*

Demonstraţie. Demonstrăm afirmația din enunț prin inducție după n.

Pentru $n = 0$ este evident că arborele este format doar din nodul rădăcină, deci are un singur nod și acesta este extern.

Presupunem afirmația adevărată pentru $n - 1$ și o demonstrăm pentru n, $n \geq 1$. Fie $T = (V, F)$ un arbore binar strict cu n noduri interne. Fie x un nod intern al lui T situat pe

penultimul nivel, deci x are ca descendenți două noduri externe y și z, situate pe ultimul nivel. Fie

$$T' = T \setminus \{y, z\} = (V \setminus \{y, z\}, F \setminus \{[x, y], [x, z]\})$$

arborele obținut din T prin eliminarea nodurilor externe y și z. Evident, T' este arbore binar strict și $I(T') = I(T) \setminus \{x\}$, $E(T') = E(T) \setminus \{y, z\} \cup \{x\}$, deci $\text{card}(I(T')) = \text{card}(I(T)) - 1 = n - 1$, $\text{card}(E(T')) = \text{card}(E(T)) - 1$. Conform ipotezei de inducție, aplicată pentru T', avem $\text{card}(E(T')) = \text{card}(I(T')) + 1 = n$, deci $\text{card}(E(T)) = \text{card}(E(T')) + 1 = n + 1$, adică arborele T are $n + 1$ noduri externe. Demonstrația prin inducție este încheiată. □

Propoziția 3. *Pentru orice arbore binar strict T cu n noduri interne, $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$\sum_{v \in E(T)} D_T(v) = \sum_{v \in I(T)} D_T(v) + 2n.$$

Demonstraţie. Demonstrăm egalitatea din enunț prin inducție după n.

Pentru $n = 0$ este evident că arborele T este format doar din nodul rădăcină r, $E(T) = \{r\}$, $I(T) = \emptyset$, $\sum_{v \in E(T)} D_T(v) = D_T(r) = 0$, $\sum_{v \in I(T)} D_T(v) + 2n = 0 + 2 \cdot 0 = 0$, deci egalitatea din enunț este verificată.

Presupunem egalitatea adevărată pentru $n - 1$ și o demonstrăm pentru n, $n \geq 1$. Fie $T = (V, F)$ un arbore binar strict cu n noduri interne. Fie x un nod intern al lui T situat pe penultimul nivel, deci x are ca descendenți două noduri externe y și z, situate pe ultimul nivel. Evident, $D_T(y) = D_T(z) = 1 + D_T(x)$. Fie $T' = T \setminus \{y, z\} = (V \setminus \{y, z\}, F \setminus \{[x, y], [x, z]\})$ arborele obținut din T prin eliminarea nodurilor externe y și z. Evident, T' rămâne tot arbore binar strict și $I(T') = I(T) \setminus \{x\}$, $E(T') = E(T) \setminus \{y, z\} \cup \{x\}$, $D_{T'}(v) = D_T(v)$, $\forall\, v \in I(T') \cup E(T')$. Utilizând și ipoteza de inducție, aplicată pentru T', avem $\sum_{v \in E(T)} D_T(v) = \sum_{v \in E(T')} D_{T'}(v) - D_{T'}(x) + D_T(y) + D_T(z) = \sum_{v \in I(T')} D_{T'}(v) + 2(n-1) - D_T(x) + 2(1 + D_T(x)) = \sum_{v \in I(T) \setminus \{x\}} D_T(v) + D_T(x) + 2n = \sum_{v \in I(T)} D_T(v) + 2n$. Demonstrația prin inducție este încheiată. □

Propoziția 4. *Pentru orice arbore binar strict T cu n noduri interne, $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$h(T) \geq \lceil \log_2(n + 1) \rceil .$$

Demonstraţie. Considerăm că nivelul pe care este reprezentată rădăcina arborelui este numerotat cu 0. T este un arbore binar strict, cu $2n + 1$ noduri (n interne și $n + 1$ externe), iar pe fiecare nivel $i \in \{0, 1, \ldots, h(T)\}$ el are cel mult 2^i noduri (inducție!), deci $2n + 1 \leq 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{h(T)}$. Obținem, succesiv: $2n + 1 \leq 2^{h(T)+1} - 1$, $2^{h(T)} \geq n + 1$, $h(T) \geq \log_2(n + 1)$. Cum $h(T) \in \mathbb{N}$, deducem că $h(T) \geq \lceil \log_2(n + 1) \rceil$. □

Observația 3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $\lceil \log_2(n + 1) \rceil = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Într-adevăr, fie $\lceil \log_2(n + 1) \rceil = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem, succesiv: $k - 1 < \log_2(n + 1) \leq k$, $2^{k-1} < n + 1 \leq 2^k$, $2^{k-1} \leq n < 2^k$, $k - 1 \leq \log_2 n < k$. Deci $\lfloor \log_2 n \rfloor = k - 1 = \lceil \log_2(n + 1) \rceil - 1$.

Propoziția 5. *Fie T un arbore binar strict cu n noduri interne, $n \in \mathbb{N}$. Dacă toate nodurile externe sunt situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel, atunci avem*

$$h(T) = \lceil \log_2(n + 1) \rceil ,$$
$$\sum_{v \in E(T)} D_T(v) = (n + 1) \lceil \log_2(n + 1) \rceil + n + 1 - 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}.$$

Demonstraţie. Considerăm din nou că nivelul pe care este reprezentată rădăcina arborelui este numerotat cu 0. Rezultă că:

- arborele are $h(T)+1$ nivele, numerotate cu $0, 1, \ldots, h(T)$;
- pe nivelele $0, 1, \ldots, h(T)-2$ avem doar noduri interne, fiecare având câte doi descendenți;
- pe penultimul nivel, $h(T)-1$, putem avea și noduri externe, iar nodurile interne de pe acest nivel au de asemenea câte doi descendenți;
- pe ultimul nivel, $h(T)$, avem doar noduri externe;
- pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, h(T)-1\}$, pe nivelul i avem exact 2^i noduri.

Notând cu a numărul de noduri interne de pe penultimul nivel și cu b numărul de noduri externe de pe același nivel, obținem că

$$a + b = 2^{h(T)-1} \tag{2}$$

(numărul total de noduri de pe penultimul nivel, nivelul $h(T)-1$), iar $a \geq 1$ (pe penultimul nivel există cel puțin un nod intern).

Pe nivelele $0, 1, \ldots, h(T)-2$ nu avem noduri externe, pe penultimul nivel, $h(T)-1$, avem b noduri externe, iar pe ultimul nivel, $h(T)$, avem $2a$ noduri externe (și anume descendenții celor a noduri interne de pe penultimul nivel), deci numărul total de noduri externe ale arborelui este egal cu $b+2a$. Rezultă că

$$b + 2a = n + 1 \tag{3}$$

și

$$\sum_{v \in E(T)} D_T(v) = b(h(T)-1) + 2a \cdot h(T). \tag{4}$$

Din relațiile (2) și (3) obținem că

$$a = n + 1 - 2^{h(T)-1}. \tag{5}$$

Dar $1 \leq a \leq 2^{h(T)-1}$ (a doua inegalitate rezultă din (2)), deci $1 \leq n+1-2^{h(T)-1} \leq 2^{h(T)-1}$. Rezultă că $2^{h(T)-1} \leq n < n+1$ și $2^{h(T)} \geq n+1$, deci $h(T)-1 < \log_2(n+1) \leq h(T)$ și astfel $h(T) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Conform (4), (3) și (5) obținem că

$$\begin{aligned}\sum_{v \in E(T)} D_T(v) &= (n+1-2a)(h(T)-1) + 2a \cdot h(T) = (n+1)h(T) + 2a - n - 1 \\ &= (n+1)h(T) + 2\left(n+1-2^{h(T)-1}\right) - n - 1 = (n+1)h(T) + n + 1 - 2^{h(T)},\end{aligned}$$

de unde rezultă a doua egalitate din enunț. □

Propoziția 6. *Pentru orice arbore binar strict T cu n noduri interne, $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$\sum_{v \in E(T)} D_T(v) \geq (n+1)\lceil \log_2(n+1) \rceil + n + 1 - 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}.$$

Mai mult, egalitatea are loc dacă și numai dacă toate nodurile externe sunt situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{M} = \{T \mid T = \text{ arbore binar strict, } \text{card}(I(T)) = n\}$ și $S(T) = \sum_{v \in E(T)} D_T(v)$, $\forall\, T \in \mathcal{M}$. Fie $T^* \in \mathcal{M}$, $T^* = (V, F)$, astfel încât

$$S(T^*) = \min\{S(T) \mid T \in \mathcal{M}\}.$$

Considerăm din nou că nivelul pe care este reprezentată rădăcina arborelui este numerotat cu 0. Demonstrăm că arborele T^* nu are noduri externe pe nivelele 0,1, ..., $h(T^*) - 2$ prin reducere la absurd. Să presupunem că arborele T^* ar avea un nod extern x pe un nivel i, cu $i \leq h(T^*) - 2$. Fie y un nod intern al lui T^* situat pe penultimul nivel, nivelul $h(T^*) - 1$, și fie y_1 și y_2 cei doi descendenți ai lui y, deci y_1 și y_2 sunt noduri externe situate pe ultimul nivel, nivelul $h(T^*)$. Evident, $D_{T^*}(x) = i,\ D_{T^*}(y) = h(T^*) - 1,\ D_{T^*}(y_1) = D_{T^*}(y_2) = h(T^*)$.

Fie T' arborele obținut din T^* prin mutarea nodurilor y_1 și y_2 de la descendenți ai nodului y la descendenți ai nodului x, adică

$$T' = (V, F \setminus \{[y, y_1], [y, y_2]\} \cup \{[x, y_1], [x, y_2]\}).$$

Evident, T' rămâne un arbore binar strict, $T' \in \mathcal{M}$, $E(T') = E(T^*) \setminus \{x\} \cup \{y\}$, $D_{T'}(y_1) = D_{T'}(y_2) = i + 1$, $D_{T'}(v) = D_{T^*}(v)$, $\forall\, v \in E(T') \setminus \{y_1, y_2\}$. Avem $S(T') - S(T^*) = \sum_{v \in E(T')} D_{T'}(v) - \sum_{v \in E(T^*)} D_{T^*}(v) = D_{T'}(y) + D_{T'}(y_1) + D_{T'}(y_2) - D_{T^*}(x) - D_{T^*}(y_1) - D_{T^*}(y_2) = h(T^*) - 1 + 2(i + 1) - i - 2h(T^*) = i + 1 - h(T^*) < 0$, deci $S(T') < S(T^*)$, ceea ce contrazice alegerea lui T^*. Demonstrația prin reducere la absurd este încheiată.

Deoarece arborele T^* nu are noduri externe pe nivelele 0,1, ..., $h(T^*) - 2$, rezultă că toate nodurile sale externe sunt situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel. Aplicând Propoziția 5 rezultă că

$$\min\{S(T) \mid T \in \mathcal{M}\} = s(T^*) = (n + 1)\lceil \log_2(n + 1)\rceil + n + 1 - 2^{\lceil \log_2(n+1)\rceil},$$

de unde rezultă inegalitatea din enunț. Mai mult, dacă toate nodurile externe sunt situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel atunci, conform Propoziției 5, inegalitatea din enunț devine egalitate, iar în caz contrar, conform demonstrației prin reducere la absurd de mai sus, inegalitatea este strictă. □

Căutarea binară

Considerăm problema căutării unei valori date x printre elementele unui vector sortat crescător dat $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Algoritmul de căutare binară rezolvă această problemă prin următoarea strategie de tip *Divide et Impera*:

- Se compară x cu elementul median a_m, unde $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$;
- Avem trei variante posibile:
  - Dacă $x = a_m$, atunci căutarea se încheie cu succes;
  - Dacă $x < a_m$, atunci algoritmul continuă cu căutarea lui x în subvectorul $(a_1, \ldots, a_{m-1})$;
  - Dacă $x > a_m$, atunci algoritmul continuă cu căutarea lui x în subvectorul $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$.

Obținem astfel următoarea variantă iterativă a algoritmului:

CAUT-BIN(A, n, x) **:**
$p \leftarrow 1$; $u \leftarrow n$; // $(a_p, \ldots, a_u)$ reprezintă subvectorul curent
// la care s-a restrâns căutarea
while $p \leq u$ **do**
  $m \leftarrow \left\lfloor \frac{p+u}{2} \right\rfloor$;
  if $x = a_m$ **then**
    return m; // căutarea se încheie cu succes
  else
    if $x < a_m$ **then**
      $u \leftarrow m - 1$;
    else
      $p \leftarrow m + 1$;
return -1; // căutarea se încheie fără succes

Observația 4. Pentru evaluarea complexității algoritmilor care rezolvă problema considerată, vom analiza numai comparațiile în care intervin valoarea căutată x și un element al vectorului A, numite *comparații de chei*. Astfel considerăm că aceste comparații se efectuează succesiv (comparațiile simultane pot fi separate).

Prezentăm câteva noțiuni ajutătoare.

Definiția 9. *Un* ***arbore binar de căutare (BST - Binary Search Tree)*** *este un arbore binar cu proprietatea că orice nod intern are valoarea (eticheta) mai mare decât orice nod din subarborele său stâng si mai mică decât orice nod din subarborele său drept.*

Observația 5. Fie $\mathcal{A}$ un algoritm de căutare, bazat pe comparații de chei, ce rezolvă problema considerată. Presupunem că algoritmul nu conține instrucțiuni redundante și este aplicabil pentru orice poziționare posibilă a valorii x în raport cu componentele vectorului A, deci valoarea x este comparată exact câte o dată cu fiecare componemtă a_i, $i = \overline{1, n}$.

Atunci algoritmului $\mathcal{A}$ i se poate asocia un arbore binar de căutare $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ având n noduri, etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$, construit recursiv astfel: dacă prima comparație efectuată de algoritm este între valoarea căutată x și un element a_i al vectorului, atunci:

- rădăcina arborelui este etichetată cu indicele i;
- subarborele stâng corespunde continuării algoritmului în cazul $x < a_i$, dacă acest caz este posibil după prima comparație (altfel este vid, adică nu există descendent stâng);
- subarborele drept corespunde continuării algoritmului în cazul $x > a_i$, dacă acest caz este posibil după prima comparație (altfel este vid, adică nu există descendent drept).

Reciproc, oricărui arbore binar de căutare $\mathcal{T}$ având n noduri, etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$, îi corespunde un algoritm de căutare $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ a valorii x în vectorul sortat

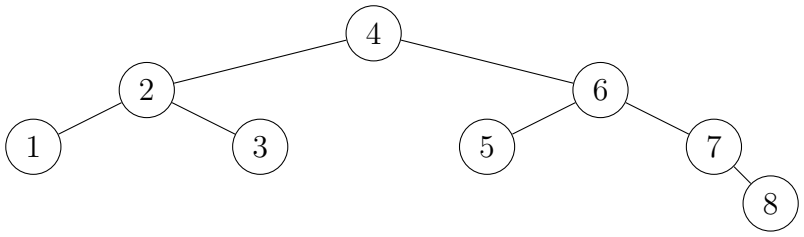
$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, descris recursiv astfel:

$\mathcal{A}(\mathcal{T})$:
if $\left[\mathcal{T}\ este\ vid\right]$ **then**
  return -1; `// căutare fără succes`
else
  $i \leftarrow$ eticheta rădăcinii lui $\mathcal{T}$;
  if $x = a_i$ **then**
    return i; `// căutare cu succes`
  else
    if $x < a_i$ **then**
      $\mathcal{T}_s \leftarrow$ subarborele stâng al lui $\mathcal{T}$;
      return $\mathcal{A}(\mathcal{T}_s)$;
    else
      $\mathcal{T}_d \leftarrow$ subarborele drept al lui $\mathcal{T}$;
      return $\mathcal{A}(\mathcal{T}_d)$;

Corespondențele $\mathcal{A} \to \mathcal{T}(\mathcal{A})$ și $\mathcal{T} \to \mathcal{A}(\mathcal{T})$ de mai sus sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci sunt bijecții între mulțimea algoritmilor de căutare (bazați pe comparații de chei) a unei valori x într-un vector sortat cu n componente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și mulțimea arborilor binari de căutare având n noduri etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$.

Definiția 10. *Arbore binar de căutare $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ construit în observația anterioară se numește și* ***arborele de decizie al algoritmului de căutare*** *$\mathcal{A}$.*

Exemplul 2. Arborele binar de căutare asociat algoritmului căutării binare pentru $n = 8$ este reprezentat în figura următoare.



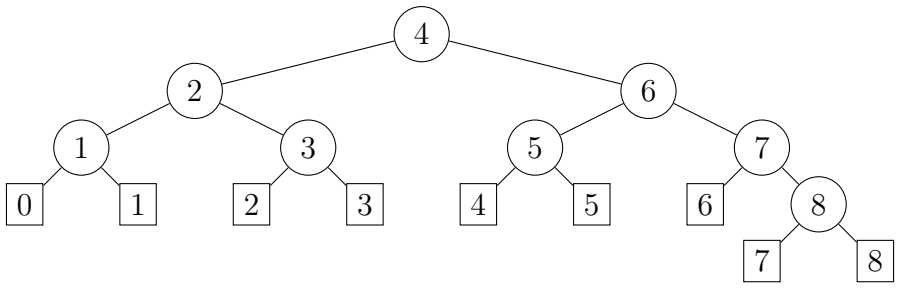
Observația 6. Arborele de căutare asociat algoritmului de căutare binară este un arbore binar, nu neapărat strict.

Definiția 11. *Fie $\mathcal{T}$ un arbore binar de căutare având n noduri, etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$. Extindem arborele binar $\mathcal{T}$ la un arbore binar strict $\overline{\mathcal{T}}$ astfel: pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nodul lui $\mathcal{T}$ având eticheta k este reprezentat într-un cerc și devine nod intern în $\overline{\mathcal{T}}$ prin aplicarea următoarelor două reguli:*

- *dacă nodul nu are descendent stâng, atunci i se adaugă un descendent stâng etichetat cu $k - 1$ și reprezentat într-un pătrat;*
- *dacă nodul nu are descendent drept, atunci i se adaugă un descendent drept etichetat cu k și reprezentat într-un pătrat.*

Arborele $\overline{\mathcal{T}}$ se numește ***arbore binar extins de căutare****.*

Exemplul 3. Arborele binar extins de căutare asociat algoritmului căutării binare pentru $n = 8$ este reprezentat în figura următoare.



Observația 7. Pentru orice algoritm de căutare $\mathcal{A}$ a valorii x în vectorul sortat $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, arborele binar extins de căutare asociat $\overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ este un arbore binar strict ce are n noduri interne, etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$ reprezentate în cercuri și $n + 1$ noduri externe, etichetate cu numerele $0, 1, 2, \ldots, n$ reprezentate în pătrate, având semnificația următoare:

- pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nodul intern etichetat cu i reprezintă comparația valorii căutate, x, cu elementul a_i din vectorul sortat;
- pentru orice $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, nodul extern etichetat cu i reprezintă încheierea fără succes a căutării, corespunzătoare situației:

$$\begin{array}{rl} x < a_1, & \text{dacă } i = 0, \\ a_i < x < a_{i+1}, & \text{dacă } 1 \leq i \leq n-1, \\ x > a_n, & \text{dacă } i = n. \end{array}$$

De asemenea, avem:

- la o căutare cu succes, $x = a_i$, numărul de comparații de chei este egal cu numărul de noduri (interne) situate pe lanțul elementar dintre nodul rădăcină și nodul intern i, adică este mai mare cu 1 decât lungimea acestui lanț;
- la o căutare fără succes numărul de comparații de chei este egal cu numărul de noduri interne situate pe lanțul elementar dintre nodul rădăcină și nodul extern corespunzător încheierii fără succes a căutării, adică cu lungimea acestui lanț.

Teorema 2 (**complexitatea algoritmilor de căutare**)**.** *Pentru orice algoritm de căutare $\mathcal{A}$, bazat pe comparații de chei, a valorii x în vectorul sortat $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avem:*

1) numărul de comparații de chei efectuate în cazul cel mai defavorabil este mai mare sau egal cu $\lceil \log_2(n+1) \rceil$;

2) numărul mediu de comparații de chei efectuate este mai mare sau egal cu

$$\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \lceil \log_2(n+1) \rceil + \frac{n+2-2 \cdot 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}{2n+1}.$$

Demonstraţie. 1) Analizăm cazul cel mai defavorabil. Conform Observației 7, numărul de comparații de chei efectuate în cazul cel mai defavorabil este egal cu înălțimea h a arborelui binar extins de căutare asociat $\overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$. Arborele $\overline{\mathcal{T}}$ este un arbore binar strict, cu n noduri interne (și $n+1$ noduri externe), deci conform Propoziției 4 rezultă că $h \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

2) Analizăm acum cazul mediu (cazul timpului mediu de execuție). Conform Observației 7, numărul mediu de comparații de chei are valoarea

$$N_{med}(n) = \frac{\sum\limits_{k\in I}(1+D(k)) + \sum\limits_{k\in E} D(k)}{2n+1} = \frac{n + \sum\limits_{k\in I} D(k) + \sum\limits_{k\in E} D(k)}{2n+1},$$

unde I este mulțimea nodurilor interne, E este mulțimea nodurilor externe, iar, pentru fiecare nod k, $D(k)$ reprezintă distanța de la rădăcina arborelui $\overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ la nodul k. Conform Propozițiilor 3 și 6 rezultă că

$$N_{med}(n) = \frac{2\sum\limits_{k\in E} D(k) - n}{2n+1} \geq \frac{2\left((n+1)\lceil \log_2(n+1)\rceil + n + 1 - 2^{\lceil \log_2(n+1)\rceil}\right) - n}{2n+1},$$

adică inegalitatea din enunț. □

Propoziția 7. *Pentru algoritmul de căutare binară într-un vector sortat cu n componente, o căutare cu succes necesită cel mult h comparații de chei, iar o căutare fără succes necesită $h-1$ sau h comparații de chei, unde $h = \lceil \log_2(n+1) \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{T}(n)$ arbore binar de căutare asociat algoritmului de căutare binară într-un vector sortat cu n componente. Conform descrierii algoritmului de căutare binară și a construirii arborelui binar de căutare asociat, rezultă că subarborele stâng al lui $\mathcal{T}(n)$ corespunde căutării binare în subvectorul $(a_1, \ldots, a_{m-1})$, unde $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, deci este chiar $\mathcal{T}\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)$, iar subarborele drept corespunde căutării binare în subvectorul $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ de lungime $n - m = n - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$, deci are aceeași structură cu $\mathcal{T}\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ (doi arbori binari *au aceeași structură* dacă sunt identici, cu excepția etichetelor, adică prin suprapunerea rădăcinilor ei se suprapun perfect). Aplicând metoda inducției matematice, rezultă că arborele binar $\mathcal{T}(n+1)$ are aceeași structură cu arborele binar $\mathcal{T}(n)$ plus un nod extern, situat pe ultimul nivel (la pasul inductiv se analizează separat cazurile n par, respectiv impar și se aplică ipoteza de inducție pentru cei doi subarbori). Cum $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ pentru n impar, respectiv $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ pentru n par, rezultă că subarborele drept al lui $\mathcal{T}(n)$, având aceeași structură cu $\mathcal{T}\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$, are aceeași structură cu subarborele stâng $\mathcal{T}\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)$ plus un eventual nod extern (când n este par). Aplicând din nou metoda inducției matematice, rezultă că în arborele binar $\mathcal{T}(n)$ toate nodurile care nu au doi descendenți (fii) sunt situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel (la pasul inductiv se folosește relația de structură menționată dintre cei doi subarbori și se aplică ipoteza de inducție pentru subarborele drept).

Rezultă că arborele binar extins de căutare asociat $\overline{\mathcal{T}}(n)$ are nodurile externe situate pe cel mult două nivele. Notând cu h înălțimea arborelui extins (adică lungimea maximă de la rădăcină la un nod extern) și considerând că rădăcina arborelui este reprezentată pe nivelul 0, rezultă că: arborele extins are $h+1$ nivele, n noduri interne și $n+1$ noduri externe; pe nivelele $0, 1, \ldots, h-2$ avem doar noduri interne, fiecare având câte doi descendenți; pe penultimul nivel, $h-1$, putem avea și noduri externe, iar nodurile interne de pe acest nivel au de asemenea câte doi descendenți; pe ultimul nivel, h, avem doar noduri externe.

Conform Propoziției 5 și Observației 3 rezultă că $h = \lceil \log_2(n+1) \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Conform Observației 7 rezultă că o căutare cu succes necesită cel mult h comparații de chei, iar o căutare fără succes necesită $h-1$ sau h comparații de chei. □

Observația 8. Conform propoziției anterioare, algoritmul de căutare binară are timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil de ordinul $\Theta(\log_2 n)$ (celelalte operații nu depășesc ordinul de creștere al comparațiilor de chei), deci timpul (mediu) de execuție are ordinul $\mathcal{O}(\log_2 n)$. Teorema următoare îmbunătățește acest rezultat.

Teorema 3. *Fie $T(n)$ timpul mediu de execuție al algoritmului de căutare binară într-un vector sortat cu n componente. Avem $T(n) = \Theta(\log_2 n)$.*

Demonstrație. Considerăm că timpul mediu de execuție $T(n)$ al algoritmului de căutare binară este dat de numărul de comparații de chei efectuate (celelalte operații nu depășesc ordinul de creștere al acestora). Vom demonstra că $T(n) = \Theta(\log_2 n)$ prin două metode.

Metoda 1) Vom aplica Teorema Master. Conform descrierii recursive a algoritmului de căutare binară, timpul de execuție $T(n)$ verifică relația de recurență

$$T(n) = T(n/2) + \mathcal{O}(1),\ \forall\, n > 0,$$

cu convențiile de notație din Teorema Master. Conform Cazului 2 al acelei teoreme, pentru $a = 1,\ b = 2,\ c = 0 = \log_b a$ și $k = 0$, rezultă că $T(n) = \Theta(\log_2 n)$.

Observația 9. Ca o consecință imediată a Metodei 1, Propoziției 7 și Teoremei 2 rezultă că algoritmul de căutare binară este asimptotic optim (în clasa algoritmilor bazați pe comparații de chei, atât în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil, cât și în raport cu timpul mediu de execuție). Pentru a justifica faptul că algoritmul este chiar optim, nu este suficientă evaluarea complexității cu Teorema Master. Aici intervine metoda următoare, prin care se numără comparațiile efectuate de algoritm.

Metoda 2) Vom calcula efectiv timpul mediu de execuție $T(n)$. Conform demonstrației Propoziției 7, arborele binar extins de căutare asociat algoritmului căutării binare este un arbore binar strict cu n noduri interne și $n+1$ noduri externe, iar toate nodurile externe sunt situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel. Notăm cu I mulțimea nodurilor interne, cu E mulțimea nodurilor externe, iar pentru fiecare nod k notăm cu $D(k)$ distanța de la rădăcina arborelui la nodul k. Conform Observației 7, timpul mediu de execuție are valoarea

$$T(n) = \frac{\sum\limits_{k\in I}(1+D(k)) + \sum\limits_{k\in E} D(k)}{2n+1} = \frac{n + \sum\limits_{k\in I} D(k) + \sum\limits_{k\in E} D(k)}{2n+1}.$$

Conform Propozițiilor 3 și 5 rezultă că

$$T(n) = \frac{2\sum\limits_{k\in E} D(k) - n}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}\cdot\lceil \log_2(n+1)\rceil + \frac{n+2-2\cdot 2^{\lceil \log_2(n+1)\rceil}}{2n+1}. \tag{6}$$

Dar, conform Observației 3, $\lceil \log_2(n+1)\rceil = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$, deci

$$T(n) = \frac{2n+2}{2n+1}\cdot\lfloor \log_2 n\rfloor + \frac{3n+4-4\cdot 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor}}{2n+1}.$$

Evident, $\log_2 n - 1 < \lfloor \log_2 n \rfloor \leq \log_2 n$, deci $\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leq n$. Rezultă că

$$\log_2 n - \frac{3n - 2 - \log_2 n}{2n+1} < T(n) < \log_2 n + \frac{n + 4 + \log_2 n}{2n+1}, \text{ deci}$$
$$1 - \frac{3n - 2 - \log_2 n}{(2n+1)\log_2 n} < \frac{T(n)}{\log_2 n} < 1 + \frac{n + 4 + \log_2 n}{(2n+1)\log_2 n}, \ \forall n \geq 2.$$

Aplicând *Criteriul cleștelui* rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T(n)}{\log_2 n} = 1, \tag{7}$$

deci conform Propoziției 1 obținem că $T(n) = \Theta(\log_2 n)$. □

Mai mult, conform relației (7) am obținut următorul rezultat.

Corolarul 2. *Numărul mediu de comparații de chei efectuate de algoritmul de căutare binară într-un vector sortat cu n componente este asimptotic echivalent cu* $\log_2 n$.

Teorema 4 (**optimalitatea algoritmului de căutare binară**)**.** *Algoritmul de căutare binară este optim (în clasa algoritmilor bazați pe comparații de chei), atât în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil, cât și în raport cu timpul mediu de execuție.*

Demonstraţie. Optimalitatea în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil este o consecință directă a Propoziției 7 și a primei părți din Teorema 2. Optimalitatea în raport cu timpul mediu de execuție este o consecință directă a relației (6) din demonstrația Teoremei 3 și a părții secunde din Teorema 2. □

Bibliografie

[1] Gh. Barbu, I. Văduva, M. Boloșteanu, *Bazele informaticii*, Editura Tehnică, București, 1997.

[2] A. Carabineanu, *Structuri de date*, http://ebooks.unibuc.ro/informatica/carabineanu/CARA_STR.pdf.

[3] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 2009.

[4] H. Georgescu, *Tehnici de programare*, Editura Universității din București, București, 2005.

[5] D.E. Knuth, *The Art Of Computer Programming. Vol. 4A: Combinatorial Algorithms*, Addison-Wesley, Massachusetts, 2011.

[6] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, New Jersey, 2013.

Perspective profesionale pentru pasionații de programare

ROWEB Development [1]

În contextul actual al învățământului superior din România numărul de absolvenți de Informatică este de aproximativ 7000 pe an, iar necesarul de pe piața muncii este mult mai mare. Comisia Europeană estimează că, până în anul 2020, Europa s-ar putea confrunta cu un deficit de până la 825.000 de profesioniști în IT&C, dintre care aproximativ 300.000 vor fi necesari pentru a acoperi creșterea prognozată a domeniului de software din România.

Discrepanța dintre cerere și ofertă reprezintă deja o provocare, pe care atât companiile producătoare de software, cât și universitățile încearcă să o rezolve, adesea în colaborare. Unele facultăți de informatică își dublează deja de la un an la altul numărul de locuri, iar unele companii oferă training sau colaborează cu universitățile pentru a-și asigura viitori angajați.

O altă provocare o reprezintă potrivirea dintre limbajele de programare predate la nivelul liceelor și facultăților, și tehnologiile cerute pe piață. Stagiile de vară, internship-urile în cadrul companiilor cu experiență, precum și concursurile de programare urmăresc îmbunătățirea acestui aspect. *Infoarena* reunește informații despre cele mai importante concursuri, inclusiv:

a) .campion - un program de pregătire de performanță în informatică susținut de profesori de prestigiu din țară, membri ai Comisiei Naționale de Informatică, și de studenți - foști olimpici internaționali la informatică;

b) TopCoder - un concurs ce pune accent în primul rând pe viteză și acuratețe, apoi pe dificultate;

c) IPSC - Internet Problem Solving Contest - cel mai prestigios concurs online pe echipe și totodată primul concurs care nu pune accentul pe surse de soluții, ci pe output-uri pentru testele publicate;

d) Waterloo Programming Contests - concursuri de pregătire pentru ACM organizate de către Universitatea Waterloo din Canada;

e) ACM - University of Vallaloid, ACM - Peking University și ACM - Zhejiang University organizează concursuri lunare;

f) ACM ICPC International Collegiate Programming Contest - cel mai prestigios concurs de programare/algoritmică pentru universități;

g) CodeCup - Concurs anual organizat de către The Netherlands Olympiad in Informatics;

h) Bubble Cup - Concurs organizat în Serbia, cu sprijinul Microsoft Development Center Serbia.

Concursurile stimulează studenții să își dezvolte un nivel înalt al cunoștințelor și abilităților în programare, însă pentru a-i ajuta să-și facă o idee asupra pieței muncii în care urmează să lucreze, este nevoie de implicarea companiilor.

[1] vcostea@roweb.ro, catalina.radu@roweb.ro

ROWEB este un exemplu de companie care investește în astfel de eforturi, remarcându-se în Pitești printr-o colaborare cu Universitatea ce durează de peste 12 ani. Fondatorii ROWEB au absolvit Universitatea din Pitești și încă din primii ani de la înființare au atras tineri studenți și absolvenți talentați, care s-au bucurat de apariția unei firme care le permitea să-și urmeze pasiunea pentru programare fără să fie nevoie să părăsească Pitești-ul în favoarea unui centru de software mai mare din țară.

Colaborarea dintre ROWEB și UPIT a adus beneficii comunității universitare locale și a ajutat multe tinere talente să aibă mai ușor acces la o carieră ca programatori. Această colaborare s-a concretizat prin workshop-uri gratuite de Android, HTML și PHP, susținere în jurizarea unor concursuri de programare, precum și stagii de vară de care au beneficiat sute de studenți. Stagiile se desfășoară cu succes încă de acum 9 ani și în fiecare an ajută câteva zeci de studenți sa se familiarizeze cu dezvoltarea de aplicații în .NET, PHP sau cu dezvoltarea de aplicații mobile. Mai mulți stagiari au rămas ulterior ca angajați full-time, aproximativ 90% din angajații firmei fiind foști stagiari.

Stagiile de vară permit studenților să lucreze împreună cu dezvoltatorii seniori, foarte prietenoși, entuziaști să-și împărtășească experiența și cunoștințele, și să pună în practică cunoștințele acumulate la facultate, căpătând nu doar experiență profesională, ci și training intensiv din partea unor specialiști care au o reputație foarte bună pentru expertiza lor în cele mai recente tehnologii și pentru aderarea la cele mai bune practici de lucru.

Un stagiu de practică la ROWEB reprezintă o oportunitate de pregătire a studenților pentru intrarea pe piața muncii, dar în același timp le oferă acestora șansa de a pune în practică toate cunoștințele dobândite în anii de studiu, ajutându-i să se familiarizeze cu cerințele concrete din piața de IT.

Însă în IT nu este suficient să dezvolți noi talente și să atragi proaspeții absolvenți. Retenția angajaților a devenit o provocare în ultimii ani, în condițiile disparității dintre cerere și oferta de muncă. Salariul nu mai este de mult principalul diferențiator pe care îl are în vedere un candidat bun când alege compania pentru care să lucreze. Acesta ajunge acum să se uite la alte aspecte, cum sunt cele legate de cultura organizațională, dezvoltare de carieră și personală, de posibilitatea unui program de lucru flexibil, posibilitatea de a lucra de acasă etc. Tinerii programatori își doresc și au posibilitatea să aleagă o companie care să le împărtășească valorile și să le asigure transparența și un mediu de lucru plăcut, în care ideile să le fie ascultate și apreciate.

ROWEB are în vedere aceste aspecte prin posibilitatea de a se realoca dintr-o linie de business în alta prin intermediul programului de mobilitate internă, acces la cursuri de programare, de limba engleză, la o bibliotecă de specialitate și prin dezvoltarea și păstrarea unei culturi organizaționale etice și incluzive, care asigură angajaților un echilibru între viața personală și profesională și beneficii care le permit să progreseze profesional și să își întemeieze și susțină familii în același timp, ceea ce reprezintă o diferență importantă mai ales pentru programatoare, care în alte companii sunt adesea nevoite sa aleagă între evoluția profesională și decizia de a avea copii.

Alte criterii importante sunt amploarea și complexitatea proiectelor, accentul pus mai degrabă pe proiecte de dezvoltare, care implică tehnologii noi, decât pe cele de mentenanță, ceea ce permite angajaților să învețe în permanență și să aibă de-a face cu provocări noi în domeniu.

În condițiile în care, conform estimărilor ANIS, anul acesta industria de software și servicii IT din România va reprezenta 3% din PIB, iar nevoia de a forma specialiști într-un ritm care să

ține pasul cu cel al cererii exprimate este din ce în ce mai evidentă în piață, tinerii care aleg specializarea informatică au provocări tot mai mari în față, trebuie să se adapteze rapid și să fie mereu la curent cu cele mai noi tehnologii pentru a fi competitivi, dar în același timp beneficiază de posibilități tot mai mari de dezvoltare, de compensare salarială și de a alege angajatorul care le îndeplinește cel mai bine cerințele.

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Laurențiu Deaconu [1]

Ne propunem să realizăm o aplicație (un program) care să rezolve un sistem de ecuații liniare. Nu insistăm asupra sistemelor de ecuații liniare compatibile determinate (pentru care rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse și cu numărul de necunoscute) pentru care există multe metode simple de rezolvare (inclusiv metoda Cramer) care se pot transfera în algoritmi informatici, ci prezentăm o metodă care permite atât stabilirea compatibilității cât și rezolvarea sistemelor compatibile nedeterminate.

Argumentare matematică

Considerăm sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

cu $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$, $m, n \in \mathbb{N}^\star$.

Algoritmul folosit pentru rezolvarea sistemului are la bază lema substituției. Pentru simplificarea calculelor vom organiza rezolvarea transferând sistemul într-un tabel. În mod normal, dacă sistemul este compatibil, algoritmul are m pași. La pasul k ($0 \le k \le m$) tabelul are următoarea structură:

	x_1	x_2	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n	
	$j_1^{[k]}$	$j_2^{[k]}$	$\dots$	$j_l^{[k]}$	$\dots$	$j_n^{[k]}$	
$i_1^{[k]}$	$a_{11}^{[k]}$	$a_{12}^{[k]}$	$\dots$	$a_{1l}^{[k]}$	$\dots$	$a_{1n}^{[k]}$	$b_1^{[k]}$
$i_2^{[k]}$	$a_{21}^{[k]}$	$a_{22}^{[k]}$	$\dots$	$a_{2l}^{[k]}$	$\dots$	$a_{2n}^{[k]}$	$b_2^{[k]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i_k^{[k]}$	$a_{k1}^{[k]}$	$a_{k2}^{[k]}$	$\dots$	$a_{kl}^{[k]}$	$\dots$	$a_{kn}^{[k]}$	$b_k^{[k]}$
0	$a_{k+1,1}^{[k]}$	$a_{k+1,2}^{[k]}$	$\dots$	$a_{k+1,l}^{[k]}$	$\dots$	$a_{k+1,n}^{[k]}$	$b_{k+1}^{[k]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$a_{m'1}^{[k]}$	$a_{m'2}^{[k]}$	$\dots$	$a_{m'l}^{[k]}$	$\dots$	$a_{m'n}^{[k]}$	$b_{m'}^{[k]}$

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, laurentiu.deaconu@upit.ro

Elementele tabelului vor fi precizate în cadrul algoritmului.

Pasul 1° Generarea tabelului. Primul tabel se completează astfel:

1. Prima linie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este doar o notație pentru coloanele asociate necunoscutelor sistemului. Ea nu se modifică pe parcursul algoritmului.
2. A doua linie $j_1, j_2, \ldots, j_n$ se completează cu 0, $j_l = 0$, $\forall l \in \overline{1,n}$. Ea se completează cu elemente nenule la fiecare pas.
3. Coloana din stânga cu elementele $i_1, i_2, \ldots, i_{m'}$ are inițial toate elementele nule, $i_k = 0$, $\forall k \in \overline{1,m'}$. La primul pas avem $m' = m$. Se completează cu elemente nenule la fiecare pas al algoritmului.
4. Zona centrală conține elementele matricei sistemului. La primul tabel ($k = 0$) avem $a_{ij}^{[0]} = a_{ij}$, $\forall i \in \overline{1,m}$, $\forall j \in \overline{1,n}$.
5. Coloana din dreapta se completează cu termenii liberi ai sistemului. Avem $b_i^{[0]} = b_i$, $\forall i \in \overline{1,m}$.

Pasul 2° Prelucrarea tabelului. La pasul k, ($k \in \overline{1,m'}$), parcurgem următoarele etape:

1. Căutăm, în linia $a_{k1}^{[k-1]}, a_{k2}^{[k-1]}, \ldots, a_{kl}^{[k-1]}, \ldots, a_{kn}^{[k-1]}$ din zona centrală, un element nenul. Dacă găsim, îl numim **pivot**, identificăm coloana în care se află (notată x_l în tabelul de mai sus) și trecem la pasul următor. Dacă avem $a_{kq}^{[k-1]} = 0$, $\forall q \in \overline{1,n}$, atunci:
   (a) dacă $b_k^{[k-1]} = 0$ eliminăm linia k deoarece corespunde unei ecuații care este o combinație liniară a ecuațiilor precedente și care nu contează în rezolvarea sistemului. În acest caz numărul ecuațiilor se micșorează cu 1, $m' \leftarrow m' - 1$. Dacă avem $k \leq m'$, reluăm etapa 1, altfel trecem la Pasul 3°.
   (b) dacă $b_k^{[k-1]} \neq 0$ algoritmul se oprește. **Sistemul este incompatibil.**
2. În coloana din stânga, punem $i_k^{[k]} = l$, unde x_l este coloana în care a fost identificat pivotul. Celelalte elemente rămân ca la pasul precedent, $i_p^{[k]} = i_p^{[k-1]}$, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, m'\} \setminus \{k\}$.
3. În linia a doua, punem $j_l^{[k]} = k$ și $j_q^{[k]} = j_q^{[k-1]}$, $\forall q \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{l\}$.
4. Elementele din linia care conține pivotul se împart la pivot:

$$a_{kq}^{[k]} = \frac{a_{kq}^{[k-1]}}{a_{kl}^{[k-1]}}, \quad \forall q \in \overline{1,n}, \quad b_k^{[k]} = \frac{b_k^{[k-1]}}{a_{kl}^{[k-1]}}.$$

   Evident $a_{kl}^{[k]} = 1$.
5. Celelalte elemente din coloana x_l, în care se află pivotul, vor fi egale cu 0, $a_{pl}^{[k]} = 0$, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, m'\} \setminus \{k\}$.
6. Toate elementele care nu au fost înlocuite în etapele 2-5 se determină folosind *regula dreptunghiului*:

$$a_{pq}^{[k]} = \frac{a_{pq}^{[k-1]} a_{kl}^{[k-1]} - a_{kq}^{[k-1]} a_{pl}^{[k-1]}}{a_{kl}^{[k-1]}} = a_{pq}^{[k-1]} - \frac{a_{kq}^{[k-1]} a_{pl}^{[k-1]}}{a_{kl}^{[k-1]}},$$

   $\forall p \in \{1, 2, \ldots, m'\} \setminus \{k\}$, $\forall q \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{l\}$.
7. Dacă $k < m'$, creștem valoarea lui k cu 1 și reluăm Pasul 2°, altfel trecem la Pasul 3°.

Pasul 3° Recuperarea soluției. **Sistemul este compatibil**:

1. **determinat**, dacă $m' = n$. Soluția este $x_l = b_{j_l^{[m']}}^{[m']}$, $1 \leq l \leq n$.

2. **nedeterminat**, dacă $m' < n$. Construim mulțimea $S = \{l \in \mathbb{N} \mid j_l^{[m']} = 0, 1 \leq l \leq n\}$. Parcurgem a doua linie, $j_1^{[m']}, j_2^{[m']}, \ldots, j_n^{[m']}$:
   (a) dacă $j_l^{[m']} = 0$, $1 \leq l \leq n$, atunci x_l este necunoscută secundară și avem $x_l = \alpha_l$, unde $\alpha_l \in \mathbb{R}$ este un parametru.
   (b) dacă $j_l^{[m']} \neq 0$, $1 \leq l \leq n$, atunci $x_l = b_{j_l^{[m']}}^{[m']} - \sum_{q \in S} a_{j_l^{[m']} q}^{[m']} \alpha_q$.

Exemplu de calcul

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+ 4x_4+ 5x_5 = 6 \\ 2x_1+ x_2+3x_3+ 2x_4+ x_5 = 8 \\ x_1+5x_2+6x_3+10x_4+14x_5 =10 \\ 2x_1+ x_2+6x_3+ 5x_4+ 4x_5 = 3 \end{cases}, \tag{2}$$

Pentru rezolvare utilizăm algoritmul prezentat mai sus. Mai întâi scriem tabelul inițial.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	0	0	
0	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6
0	2	1	3	2	1	8
0	1	5	6	10	14	10
0	2	1	6	5	4	3

În linia corespunzătoare primei ecuații toate elementele sunt nenule, deci oricare element poate fi ales ca *pivot*. Pentru a evita calculele complicate, alegem ca pivot primul element, pe 1, elementul încadrat într-un pătrat în tabelul anterior. Prelucrăm primul tabel:
– în coloana din stânga, în linia *pivotului*, punem 1 deoarece am ales *pivotul* în coloana lui x_1; restul elementelor se transcriu din primul tabel;
– în linia de deasupra zonei centrale, în coloana *pivotului*, sub x_1, punem 1 deoarece *pivotul* se găsește în linia 1 din zona centrală, linia corespunzătoare primei ecuații; restul elementelor se transcriu din primul tabel;
– linia *pivotului* se împarte la *pivot*, adică se transcrie deoarece *pivotul* este egal cu 1;
– coloana *pivotului* se completează cu zero-uri;
– restul elementelor se calculează cu *regula dreptunghiului*; de exemplu, elementul din linia 4 și coloana 3 din zona centrală (care este 6 în primul tabel) se calculează astfel:

$$a_{43}^{[1]} = \frac{6 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{1} = 0,$$

6 este elementul corespunzător din tabelul anterior, 1 este *pivotul*, 2 și 3 sunt "proiecțiile" elementului înlocuit pe coloana, respectiv linia, *pivotului*. Termenii liberi se calculează în același mod: elementul din linia 3 din coloana termenilor liberi se calculează astfel

$$b_3^{[1]} = \frac{10 \cdot 1 - (1) \cdot 6}{1} = 4.$$

Obținem tabelul următor:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	0	0	0	
1	1	2	3	4	5	6
0	0	$\boxed{-3}$	-3	-6	-9	-4
0	0	3	3	6	9	4
0	0	-3	0	-3	-6	-9

În linia corespunzătoare ecuației 2 alegem pivotul -3 din coloana lui x_2. În coloana din stânga, în linia pivotului punem 2 deoarece *pivotul* este în coloana lui x_2, iar în linia de deasupra zonei centrale, sub x_2, punem 2 deoarece *pivotul* se găsește în linia 2 din zona centrală. Restul elementelor se completează ca la pasul precedent. Obținem tabelul:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2	0	0	0	
1	1	0	1	0	-1	$\frac{10}{3}$
2	0	1	1	2	3	$\frac{4}{3}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	3	3	-5

Observăm că în linia 3 din zona centrală, în coloanele corepunzătoare necunoscutelor toate elementele sunt egale cu 0, deci nu putem alege un *pivot*. Elementul corespunzător din coloana termenilor liberi este tot 0, deci putem renunța la ecuația 3. Eliminăm această linie și obținem tabelul:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2	0	0	0	
1	1	0	1	0	-1	$\frac{10}{3}$
2	0	1	1	2	3	$\frac{4}{3}$
0	0	0	$\boxed{3}$	3	3	-5

În tabelul anterior alegem *pivotul* 3 din ultima linie și coloana lui x_3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2	3	0	0	
1	1	0	0	-1	-2	5
2	0	1	0	1	2	3
3	0	0	1	1	1	$-\frac{5}{3}$

Analizând ultimul tabel deducem că sistemul este compatibil nedeterminat. Necunoscutele principale sunt x_1, x_2, x_3, iar necunoscutele secundare x_4 și x_5. Asociem paramatri reali necunoscutelor secundare: $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$.

Pentru simplificarea identificării soluției putem completa tabelul anterior astfel:

				α	β	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2	3	0	0	
1	1	0	0	-1	-2	5
2	0	1	0	1	2	3
3	0	0	1	1	1	$-\frac{5}{3}$

Pentru x_1, în linia de deasupra zonei centrale găsim 1. Din linia corespunzătoare, adică linia 1 recuperăm x_1: din elementul din coloana termenilor liberi, 5, se scad produsele dintre elementele din coloanele corespunzătoare parametrilor și respectivii parametri, adică $-1 \cdot \alpha$ și $-2 \cdot \beta$. Procedăm similar pentru necunoscutele x_2 și x_3. Obținem astfel soluția:

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 5+\alpha+2\beta \\ x_2 = \ \ 3-\alpha-2\beta \\ x_3 = -\frac{5}{3}-\alpha \ \ -\beta \\ x_4 = \ \ \alpha \\ x_5 = \ \ \beta \end{cases}, \tag{3}$$

Implementare în limbajul C++

Algorimul prezentat în acest articol permite realizarea unui program care

- determină dacă un sistem de ecuații liniare este compatibil sau incompatibil
- identifică dacă un sistem compatibil este compatibil determinat sau compatibil nedeterminat
- pentru sistemele compatibile determinate calculează soluția
- pentru sistemele compatibile nedeterminate determină soluția generală, în funcție de parametri.

Programul prezentat mai jos, realizat în **Code::Blocks**, citește datele din fișierul text `sistem.txt` și scrie rezultatele în fișierul text `solutie.txt`.

Fișierul prezentat mai jos (`sistem.txt`) conține datele corespunzătoare sistemului (2). Prima linie conține m, n, numărul ecuațiilor, respectiv numărul necunoscutelor. În continuare se scriu elementele matricei extinse de dimensiune $m \times (n+1)$, ultima coloană conținând termenii liberi.

```
4 5
 1   2   3   4   5   6
 2   1   3   2   1   8
 1   5   6  10  14  10
 2   1   6   5   4   3
```

Programul respectă algoritmul prezentat, cu următoarele precizări:

– Pentru alegerea pivotului se determină elementul din linia curentă care are valoarea absolută maximă. Dacă acesta este nul, deducem că toate elementele liniei sunt nule. Se analizează Pasul 2°, etapa 1 (a) și (b). Dacă elementul determinat este nenul, acesta va fi pivotul (se alege elementul cu valoare absolută maximă pentru reducerea erorilor de rotunjire).

– Pentru a verifica dacă un număr real este nul, nu îl comparăm cu 0 ci verificăm dacă valoarea absolută a lui este mai mică decât ε, unde ε este un număr real pozitiv foarte mic. În program $\varepsilon = 10^{-20}$.

– Prelucrarea tabelului din Pasul 2° se face parcurgând etapele în ordinea 6, 4, 5, 3, 2.

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iomanip>
#include <math.h>
using namespace std;

ifstream f1("sistem.txt");
ofstream f2("solutie.txt");
  int m,n,io,jo;
  double a[20][40],eps=1.0e-20;
  int o[40],v[20];

void citire()
{
  int i,j;
  f1>>m>>n;
  for(i=1;i<=m;i++)
  for(j=1;j<=n+1;j++)
    f1>>a[i][j];
  f1.close();
}

void generare_tabel()
{
  int i,j;
  for(i=1;i<=m;i++)
    v[i]=0;
  for(j=1;j<=n+1;j++)
    o[j]=0;
}

void prelucrare()
{
  int i,j;
  for(i=1;i<=m;i++)
  if(i!=io)
    for(j=1;j<=n+1;j++)
    if(j!=jo)
      a[i][j]=(a[i][j]*a[io][jo]-a[i][jo]*a[io][j])/a[io][jo];
  for(j=1;j<=n+1;j++)
  if(j!=jo)
    a[io][j]/=a[io][jo];
  for(i=1;i<=m;i++)
    a[i][jo]=0.0;
  a[io][jo]=1.0;
  o[jo]=io;
  v[io]=jo;
}

int pivot()
{
  int i,j;
  double max;
  max=fabs(a[io][1]);
  jo=1;
  for(j=2;j<=n;j++)
  if(max<=fabs(a[io][j]))
  {
    max=fabs(a[io][j]);
    jo=j;
  }
  if(max<eps)
  {
    if(fabs(a[io][n+1])<eps)
```

```
    {
      for(i=io;i<m;i++)
      for(j=1;j<=n+1;j++)
        a[i][j]=a[i+1][j];
      m--;
      return -1;
    }
    else
    {
      f2<<"Sistem incompatibil!";
      io=m+2;
      return 0;
    }
  }
  else
  {
    return 1;
  }
}

void recuperare_solutie()
{
  int j;
  char c[n];
  if(io==m+1)
  {
    if(m==n)
      f2<<"Sistemul este compatibil determinat."<<endl;
    else
      {
        f2<<"Sistemul este compatibil nedeterminat."<<endl;
        int k=96;
        for (j=1;j<=n;j++)
          if(o[j]==0)
            c[j]=char(++k);
      }
    f2<<"Solutia sistemului este:"<<endl;
    for(jo=1;jo<=n;jo++)
    {
      f2<<"x"<<noshowpos<<jo<<"="<<showpos;
      if(o[jo]==0)
      {
        f2<<c[jo]<<endl;
      }
      else
      {
        io=o[jo];
        f2<<setw(8)<<fixed<<setprecision(4)<<a[io][n+1];
        for(j=1;j<=n;j++)
        if((o[j]==0)&&(fabs(a[io][j]))>eps)
        {
          f2<<setw(8)<<fixed<<setprecision(4)<<-a[io][j]<<"*"<<c[j];
        }
        f2<<endl;
      }
    }
  }
}

void scrie_tabel()
{
  int i,j;
  f2<<"======";
  for(j=1;j<=n+1;j++)
```

```
    f2<<"========";
  f2<<endl;
  f2<<"  |";
  for(j=1;j<=n;j++)
    f2<<setw(5)<<o[j]<<"   ";
  f2<<"|"<<endl;
  f2<<"------";
  for(j=1;j<=n+1;j++)
    f2<<"--------";
  f2<<endl;
  for(i=1;i<=m;i++)
  {
    f2<<setw(4)<<v[i]<<"|";
    for(j=1;j<=n;j++)
      f2<<setw(8)<<fixed<<setprecision(3)<<a[i][j];
    f2<<"|"<<setw(8)<<fixed<<setprecision(3)<<a[i][n+1]<<endl;
  }
  f2<<"======";
  for(j=1;j<=n+1;j++)
    f2<<"========";
  f2<<endl;
}

int main(void)
{
  int p;
  citire();
  if (m==0||n==0)
  {
    cout<<"Sistemul nu exista!";
    return 1;
  }
  f2<<"Tabelul initial:"<<endl;
  generare_tabel();
  scrie_tabel();
  io=1;
  do
  {
    p=pivot();
    if(p==1)
    {
      prelucrare();
      f2<<"Pozitia pivotului: linia "<<io<<"  coloana "<<jo<<endl;
      scrie_tabel();
      io++;
    }
    else
    {
      if(p==-1)
      {
        f2<<"Eliminare ecuatie - linia "<<io<<endl;
        scrie_tabel();
      }
    }
  }
  while(io<=m);
  recuperare_solutie();
  f2.close();
  return 0;
}
```

Pentru sistemul (2) se obține rezultatul din fișierul `solutie.txt`:

```
Tabelul initial:
```

```
=====================================================
    |    0       0       0       0       0   |
-----------------------------------------------------
   0|   1.000   2.000   3.000   4.000   5.000|   6.000
   0|   2.000   1.000   3.000   2.000   1.000|   8.000
   0|   1.000   5.000   6.000  10.000  14.000|  10.000
   0|   2.000   1.000   6.000   5.000   4.000|   3.000
=====================================================
Pozitia pivotului: linia 1  coloana 5
=====================================================
    |    0       0       0       0       1   |
-----------------------------------------------------
   5|   0.200   0.400   0.600   0.800   1.000|   1.200
   0|   1.800   0.600   2.400   1.200   0.000|   6.800
   0|  -1.800  -0.600  -2.400  -1.200   0.000|  -6.800
   0|   1.200  -0.600   3.600   1.800   0.000|  -1.800
=====================================================
Pozitia pivotului: linia 2  coloana 3
=====================================================
    |    0       0       2       0       1   |
-----------------------------------------------------
   5|  -0.250   0.250   0.000   0.500   1.000|  -0.500
   3|   0.750   0.250   1.000   0.500   0.000|   2.833
   0|   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000|   0.000
   0|  -1.500  -1.500   0.000   0.000   0.000| -12.000
=====================================================
Eliminare ecuatie - linia 3
=====================================================
    |    0       0       2       0       1   |
-----------------------------------------------------
   5|  -0.250   0.250   0.000   0.500   1.000|  -0.500
   3|   0.750   0.250   1.000   0.500   0.000|   2.833
   0|  -1.500  -1.500   0.000   0.000   0.000| -12.000
=====================================================
Pozitia pivotului: linia 3  coloana 1
=====================================================
    |    3       0       2       0       1   |
-----------------------------------------------------
   5|   0.000   0.500  -0.000   0.500   1.000|   1.500
   3|   0.000  -0.500   1.000   0.500   0.000|  -3.167
   1|   1.000   1.000  -0.000  -0.000  -0.000|   8.000
=====================================================
Sistemul este compatibil nedeterminat.
Solutia sistemului este:
x1= +8.0000 -1.0000*a
x2=a
x3= -3.1667 +0.5000*a -0.5000*b
x4=b
x5= +1.5000 -0.5000*a -0.5000*b
```

Așa cum se poate observa din fișierul cu rezultate, soluția generală obținută prin program pentru sistemul (2) este

$$\begin{cases} x_1 = & 8 & -a \\ x_2 = & a \\ x_3 = & -\frac{19}{6} & +\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \\ x_4 = & b \\ x_5 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \end{cases}, \tag{4}$$

În această formă ea diferă de soluția generală (3) obținută în exemplul de mai sus. Cele două soluții generale generează aceeași mulțime de soluții.

Dacă identificăm necunoscutele x_4 și x_5 din cele două soluții

$$x_4 = \alpha = b \quad \text{și } x_5 = \beta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b,$$

adică, dacă folosim substituția

$$\alpha = b \quad \text{și } \beta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b$$

în soluția (3), regăsim soluția (4):

$$\begin{cases} x_1 = 5 + b + 3 - a - b = 8 - a \\ x_2 = 3 - b - 3 + a + b = a \\ x_3 = -\frac{5}{5} - b - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{19}{6} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ x_4 = b \\ x_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{cases}.$$

Determinarea pozițiilor relative a mai multor drepte în plan cu ajutorul mediului Maple

Raluca Mihaela Georgescu [1]

Stabilirea pozițiilor relative a dreptelor determinate de perechi de puncte din plan este o problemă frecvent întâlnită în geometria analitică plană.

Rezolvarea acestei probleme necesită destul de mult timp, deoarece presupune aplicarea metodelor de determinare a pozițiilor relative a două drepte pentru fiecare pereche de drepte. Pentru n puncte distincte din plan avem $N = C_n^2$ perechi de puncte care identifică același număr de drepte. Stabilirea pozițiilor relative presupune astfel analizarea unui număr destul de mare, C_N^2, de perechi de drepte.

Mediul de programare Maple oferă posibilitatea realizării unui program care, pentru fiecare pereche în parte, determină poziția relativă a dreptelor componente și, pentru dreptele concurente, precizează măsura unghiului dintre ele.

Consideram punctele $P_i(x_i, y_i)$, cu $i \in \overline{1,n}$. Pentru a defini aceste puncte folosim comanda

```
point(Pi, xi, yi),                                                    (1)
```

pentru fiecare punct P_i cu $i \in \overline{1,n}$.

Folosind instrucțiunea `for` și obiectul geometric `line` construim toate dreptele d_{ij} ce trec prin punctele P_i și P_j, pentru orice $i \in \overline{1,n-1}$ și $j \in \overline{2,n}$, $j > i$:

```
for i to n-1 do
 for j from i+1 to n do
   line(d||i||j, [P||i, P||j])                                        (2)
 end do
end do;
```

Pentru a verifica dacă trei puncte sunt coliniare, sau dacă două drepte sunt paralele sau perpendiculare, se folosește una din funcțiile:

- `AreCollinear`, pentru a verifica dacă trei puncte sunt coliniare
- `AreParallel`, pentru a verifica dacă două drepte sunt paralele
- `ArePerpendicular`, pentru a verifica dacă două drepte sunt perpendiculare

Aceste trei funcții au ca rezultat "*adevărat*" sau "*fals*".
Măsura unghiului dintre două drepte neparalele se determină cu ajutorul funcției `FindAngle`. Dacă unghiul dintre cele două drepte nu este nul sau drept, atunci rezultatul va fi de forma "arctan(x)". În această situație, pentru a converti în grade valoarea obținută se folosesc comenzile:

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

```
Round := proc (x, n) -> parse(sprintf("%.*f", n, x));
u := FindAngle(d||i||j, d||k||l);
a := 180*convert(u, float, 6)/(3.1415926535);                                    (3)
b := Round(a, 4); c := trunc(b); d := trunc(60*(b-c));
e := Round(3600*(b-c-(1/60)*d), 0)
```

unde c reprezintă gradele, d minutele, iar e secundele corespunzătoare măsurii unghiului u dintre dreptele d_{ij} și d_{kl}.

Pentru determinarea și afișarea perechilor de drepte paralele folosim secvența

```
 print(Dreptele paralele sunt):
  for i to n-1 do
   for j from i+1 to n do
    for k from i to n-1 do
     for l from k+1 to n do
      if (i <> k or j < l) then
       if AreParallel(d||i||j, d||k||l) then                                     (4)
         print(d||i||j si d||k||l)
       end if
      end if
     end do
    end do
   end do
  end do;
```

Pentru determinarea și afișarea perechilor de drepte confundate folosim secvența

```
print(Dreptele confundate sunt):
for i to n-1 do
 for j from i+1 to n do
  for k from i to n-1 do
   for l from k+1 to n do
    if (i <> k or j < l) then
     if (AreCollinear(P||i, P||j, P||k) and
         AreCollinear(P||i, P||j, P||l)) then                                    (5)
      print(d||i||j si d||k||l)
     end if
    end if
   end do
  end do
 end do
end do
```

Pentru determinarea și afișarea perechilor de drepte perpendiculare folosim secvența

```
print(Dreptele perpendiculare sunt):
for i to n-1 do
 for j from i+1 to n do
  for k from i to n-1 do
   for l from k+1 to n do
    if (i <> k or j < l) then
     if ArePerpendicular(d||i||j, d||k||l) then                                 (6)
      print(d||i||j si d||k||l)
     end if
```

```
    end if
   end do
  end do
 end do
end do
```

Pentru a determina și afișa măsurile unghiurilor dintre perechile de drepte secante neperpendiculare folosim secvența

```
print(Masurile unghiurilor dintre dreptele secante neperpendiculare sunt):
for i to n-1 do
 for j from i+1 to n do
  for k from i to n-1 do
   for l from k+1 to n do
    if (i <> k or j < l) then
     if ((((AreCollinear(P||i, P||j, P||k) and
      AreCollinear(P||i, P||j, P||l)) or AreParallel(d||i||j, d||k||l)) or
      ArePerpendicular(d||i||j, d||k||l)) = false then
      Round := proc (x, n) -> parse(sprintf("%.*f", n, x));
      u := FindAngle(d||i||j, d||k||l);
      a := 180*convert(u, float, 6)/(3.1415926535);                    (7)
      b := Round(a, 4); c := trunc(b); d := trunc(60*(b-c));
      e := Round(3600*(b-c-(1/60)*d), 0);
      printf("Masura unghiului dintre dreptele %3.3s si %3.3s este
      %d grade %d minute %d secunde \n", d||i||j, d||k||l, c, d, e)
     end if
    end if
   end do
  end do
 end do
end do
```

Observație Pentru stabilirea si afișarea pozițiilor relative a perechilor de drepte determinate de cele n puncte, secvențele (4)-(7) pot fi combinate într-una singură, iar programul în Maple este

```
for i to n-1 do
 for j from i+1 to n do
  for k from i to n-1 do
   for l from k+1 to n do
    if (i <> k or j <> l) then
     if AreCollinear(P||i, P||j, P||k)
        and AreCollinear(P||i, P||j, P||l) } then
         print(Dreptele d||i||j si d||k||l sunt confundate)}
      elif AreParallel(d||i||j, d||k||l) then
         print(Dreptele d||i||j si d||k||l sunt paralele)               (8)
       elif ArePerpendicular(d||i||j, d||k||l) then
          print(Dreptele d||i||j si d||k||l sunt perpendiculare)
        else Round := proc (x, n) -> parse(sprintf("%.*f", n, x));
      u := FindAngle(d||i||j, d||k||l);
      a := 180*convert(u, float, 6)/(3.1415926535);
      b := Round(a, 4); c := trunc(b); d := trunc(60*(b-c));
      e := Round(3600*(b-c-(1/60)*d), 0);
      print(Dreptele d||i||j si d||k||l sunt secante neperpendiculare)
      printf("Masura unghiului dintre cele doua drepte este
```

```
      %d grade %d minute %d secunde", c, d, e)
     end if
    end if
   end do
  end do
 end do
end do
```

În continuare vom exemplifica noțiunile prezentate pentru $n = 5$ puncte din plan.

Exemplu. *Se dau punctele* $P_1(1,1)$, $P_2(4,-2)$, $P_3(5,5)$, $P_4(6,4)$, $P_5(0,2)$.

a) Să se precizeze perechile de drepte paralele;

b) Să se precizeze perechile de drepte confundate;

c) Să se precizeze perechile de drepte perpendiculare;

d) Să se calculeze măsurile unghiurilor dintre perechile de drepte secante neperpendiculare.

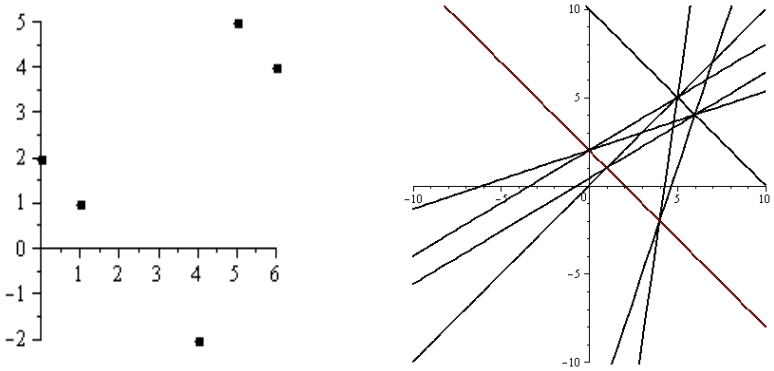
Cele 5 puncte determină $N = 10$ drepte, deci trebuie analizate $C_{10}^2 = 45$ perechi de drepte. Mai întâi definim punctele $P_i,\ i \in \overline{1,5}$, folosind comanda (1) pentru fiecare punct în parte, adică

```
point(P1, 1, 1), point(P2, 4, -2), point(P3, 5, 5),
point(P4, 6, 4), point(P5, 0, 2)
```

Apoi construim dreptele $d_{ij},\ i,j \in \overline{1,5},\ i \neq j$, folosindu-ne de (2), considerând $n = 5$.

Putem reprezenta în sistemul de axe ortogonale punctele (Fig. 1 a)) și dreptele (Fig. 1 b)) obținute, cu ajutorul comenzilor

```
draw({P1,P2,P3,P4,P5})
draw({d12,d13,d14,d15,d23,d24,d25,d34,d35,d45})
```



a) b)

Fig. 1

a) Pentru determinarea perechilor de drepte paralele folosim secvența (4) pentru $n = 5$ și obținem rezultatul

```
Dreptele paralele sunt
     d12 si d15
```

```
d12 si d25
d12 si d34
d14 si d35
d15 si d25
d15 si d34
d25 si d34
```

b) Pentru determinarea perechilor de drepte confundate folosim secvența (5) pentru $n = 5$ și obținem rezultatul

```
Dreptele confundate sunt
       d12 si d15
       d12 si d25
       d15 si d25
```

c) Pentru determinarea perechilor de drepte perpendiculare folosim secvența (6) pentru $n = 5$ și obținem rezultatul

```
Dreptele perpendiculare sunt
       d12 si d13
       d13 si d15
       d13 si d25
       d13 si d34
```

d) Pentru a determina măsurile unghiurilor dintre perechile de drepte secante neperpendiculare folosim secvența (7) pentru $n = 5$ și obținem valorile pentru măsurile unghiurilor dintre drepte.

Dacă unim cele patru cerințe într-o singură problemă, folosindu-ne de (8) pentru $n = 5$, obținem pozițiile relative pentru fiecare din cele 45 de perechi. Folosind notațiile

$=$ pentru dreptele confundate,

$\perp$ pentru dreptele perpendiculare,

$||$ pentru dreptele paralele,
iar pentru dreptele neperpendiculare măsura unghiului dintre ele, putem sintetiza rezultatele obținute în următorul tabel:

	d13	d14	d15	d23	d24	d25	d34	d35	d45
d12	$\perp$	$75°57'50''$	$=$	$53°7'48''$	$63°26'6''$	$=$	$\|\|$	$75°57'50''$	$63°26'6''$
d13		$14°2'11''$	$\perp$	$36°52'12''$	$26°33'54''$	$\perp$	$\perp$	$14°2'11''$	$26°33'54''$
d14			$75°57'50''$	$50°54'22''$	$40°36'5''$	$75°57'50''$	$75°57'50''$	$\|\|$	$12°31'44''$
d15				$53°7'48''$	$63°26'6''$	$=$	$\|\|$	$75°57'50''$	$63°26'6''$
d23					$10°18'17''$	$53°7'48''$	$53°7'48''$	$50°54'22''$	$63°26'6''$
d24						$63°30''$	$63°26'6''$	$40°36'5''$	$53°7'48''$
d25							$\|\|$	$75°57'50''$	$63°26'6''$
d34								$75°57'50''$	$63°26'6''$
d35									$12°31'44''$

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3

Doru Anastasiu Popescu [1]

Roboții sunt folosiți pentru a realiza anumite activități. Pentru a crea și programa roboți s-au realizat kit-uri speciale și medii de programare. Un asemenea robot este cel obținut din piese LEGO care pentru deplasare folosește mediul interactiv de programare Mindstorms EV3. Kit-ul de bază numit în engleză *LEGO Mindstorm Education EV3 Core Set* conține piesele necesare pentru realizarea unui robot, care să se deplaseze pe o suprafață plană (acesta conține două motoare pentru deplasare, senzori, unitate de comandă – numită *cărămidă inteligentă*, roți și alte componente LEGO necesare construcției robotului).

În Figura 1 este prezentat un robot simplu construit cu aceste piese. Pachetul de bază conține descrierea necesară construirii unui robot, cu diferți senzori, astfel încât să poată fi programat pentru deplasarea cu anumite restricții. Un *senzor* poate fi de mai multe feluri: de *culoare* – pentru determinarea unei culori, *tactil* – pentru a detecta apariția unui obiect, *infraroșu* – pentru detectarea obiectelor din apropierea robotului, etc. Robotul pe care îl vom folosi (Figura 1) pentru verificarea programelor va avea două motoare mari, câte unul pentru fiecare roată laterală și o *cărămidă inteligentă* (intelligent brick) pentru a controla acțiunile sale. Această *cărămidă* are rolul de a memora proiectele și de a lansa în execuție programele din ele.

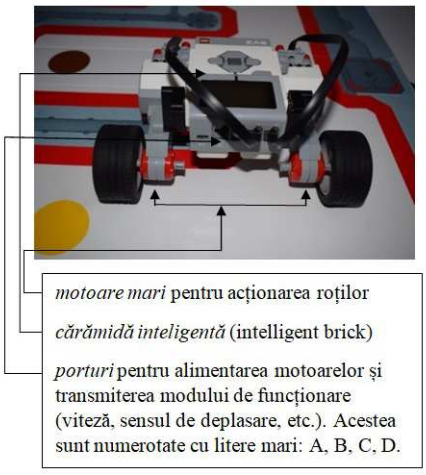

motoare mari pentru acționarea roților
cărămidă inteligentă (intelligent brick)
porturi pentru alimentarea motoarelor și transmiterea modului de funcționare (viteză, sensul de deplasare, etc.). Acestea sunt numerotate cu litere mari: A, B, C, D.

Fig. 1: Elementele constructive ale unui robot LEGO Minstorms EV3

Pentru a crea programe ce deplasează robotul avem nevoie de instalarea mediului Mindstorms Education EV3, care nu necesită costuri de licență. Kit-ul de instalare se găsește la adresa

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

https://education.lego.com/en-us/downloads. După lansarea în execuție a acestui mediu grafic interactiv de programare se obține o fereastră simplă în care apare un buton cu semnul plus. La activarea acestui buton se va crea un proiect nou, în care se vor scrie programele necesare pentru deplasarea robotului. Un proiect se salvează într-un fișier cu extensia **ev3**, iar un program este o succesiune de blocuri ce începe cu blocul de *Start* și se termină cu blocul *Stop Program*. Blocurile sunt grupate pe categorii și se află în partea de jos a ferestrei zonei de lucru (Figura 2). Un bloc este adus în program prin selecție și glisat la locul lui cu mouse-ul. Fiecare bloc trebuie configurat cu parametrii necesari.

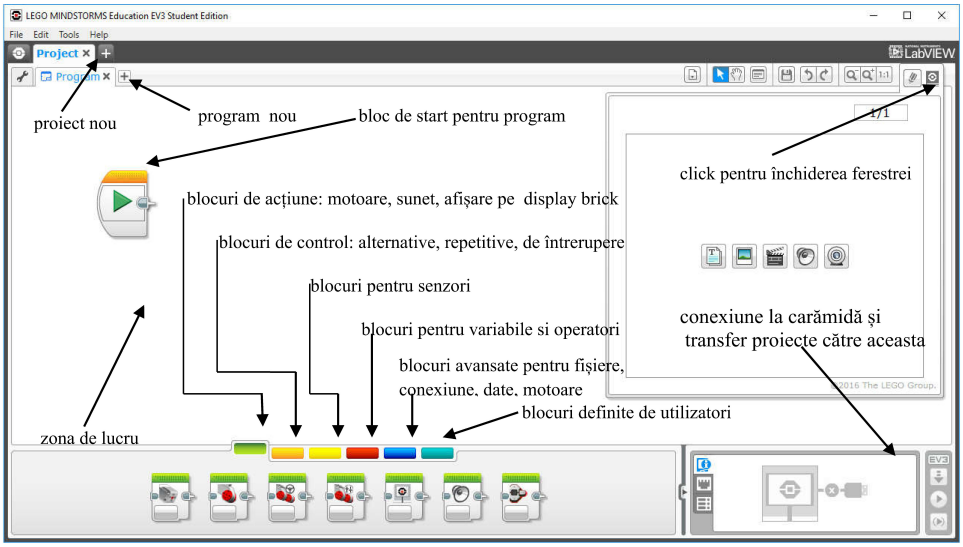

proiect nou
program nou
bloc de start pentru program
click pentru închiderea ferestrei
blocuri de acțiune: motoare, sunet, afișare pe display brick
blocuri de control: alternative, repetitive, de întrerupere
blocuri pentru senzori
blocuri pentru variabile si operatori
conexiune la cărămidă și
transfer proiecte către aceasta
blocuri avansate pentru fișiere,
conexiune, date, motoare
blocuri definite de utilizatori
zona de lucru

Fig. 2: Interfața mediului de programare Minstorms EV3

Primul program!
Programul din Figura 3 deplasează robotul cu trei rotații complete ale unei roți (aproximativ 55 cm pentru robotul din imagine). Acesta este alcătuit din patru blocuri: blocul de start, blocul *Move Stering* – configurat cu *On for Rotations*, direcția înainte, viteza 50 și 3 rotații pentru fiecare roată, blocul *Move Stering* – configurat cu *Off* pentru oprirea motoarelor, respectiv blocul de oprire *Stop Program*.

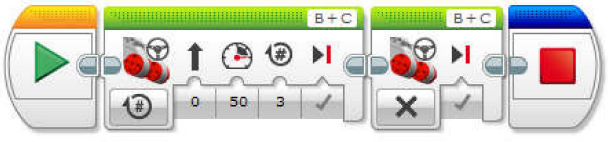


Fig. 3: Deplasarea robotului in linie dreaptă cu 3 rotații

După scrierea programului se conectează robotul la calculator și se încarcă proiectul cu programul în cărămida robotului, apoi se poate lansa în execuție (Figura 4).

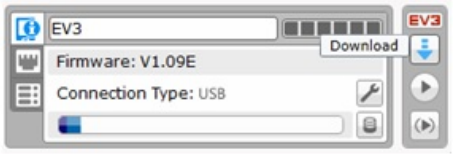


Fig. 4: Lansarea în execuție a unui program

Din acest exemplu se observă că programul este ca o schemă logică, cu specificarea faptului că blocurile sunt specializate pe o anumită operație și conectate între ele.
Pentru programele pe care le vom scrie avem nevoie de două blocuri motor din Grupul *Action*.

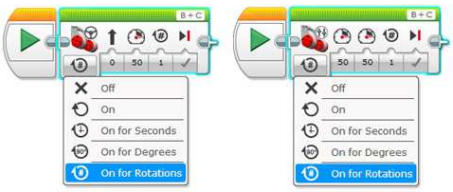


Fig. 5: Blocurile *Move Steering* și *Move Tank*

Blocurile *Move Steering* și *Move Tank* sunt folosite pentru cele două motoare (în Figura 5 motoarele sunt conectate la porturile B și C). Primul buton din fiecare bloc permite setarea unității de măsurare a deplasării: secunde, grade, număr de rotații (*On for Rotations* - pe care o vom utiliza în continuare). Pentru oprirea motoarelor se folosește *Off*, iar pentru funcționarea fără oprire *On*. La blocul *Move Steering* celelalte butoane sunt pentru configurarea direcției, vitezei și numărului de rotații la ambele motoare. La blocul *Move Tank* apar două butoane pentru configurarea separată a vitezei la fiecare motor, celelalte butoane au aceeași semnificație. Blocul *Move Tank* este folosit atunci când vrem să schimbăm direcția de deplasare (de exemplu o întoarcere).

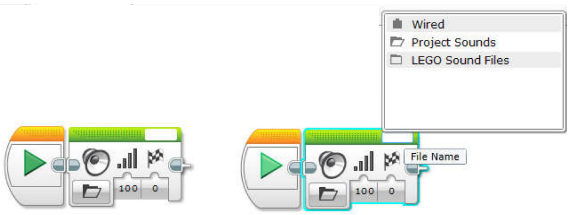


Fig. 6: Blocul Sound

În grupul de blocuri *Action* mai apar blocurile *Sound* pentru sunet (Figura 6) și *Display* pentru afișarea datelor pe ecranul cărămizii (Figura 7). Blocul *Sound* permite alegerea fișierului ce conține sunetul dorit. Mindstorm Education EV3 conține o bibliotecă cu *fișiere sunet*, acestea fiind grupate pe tipuri de sunete (mecanice, animale, culori, numere, etc.).

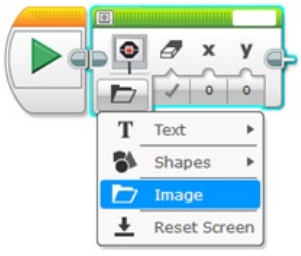


Fig. 7: Blocul Display

Blocul *Display* permite afișarea textelor, figurilor geometrice, imaginilor din fișiere, cu ștergerea sau nu a ecranului. Afișarea se va realiza pornind din poziția specificată prin coordonatele x și y. Sistemul de coordonate are originea în colțul din stânga - sus al ecranului, axa Ox pe orizontală cu sensul pozitiv spre dreapta, iar axa Oy pe verticală cu sensul pozitiv în jos.

Problema deplasării cu sunete

Dorim să deplasăm robotul cu două rotații și după fiecare rotație completă a roților acesta să redea lătratul unui câine și apoi să pronunțe cuvântul *Mindstorms*. Creați un proiect și salvați-l cu numele **p2.ev3**.

Soluție

Pentru realizarea programului se creează un proiect nou, apoi în fereastra programului se aduc din zona blocurilor *Action*: două blocuri *Move Steering*, două blocuri *Sound* și un bloc *Stop Program*. Configurarea și ordinea acestor blocuri este cea din Figura 8.

Fig. 8: Program pentru deplasarea robotului cu redarea unor sunete

Problema deplasării cu afișare pe ecran

Deplasați robotul pe o linie dus-întors, redați repetat cuvântul *Hello*, iar pe ecranul cărămizii scrieți cuvintele *Dus-Intors*. Distanța parcursă pe linie va fi de aproximativ 55 cm. Creați un proiect și salvați-l cu numele **p3.ev3**.

Soluție

Blocul *Start* se pune în legătură cu un bloc *Display*, care se configurează cu *Text – Pixels*, ștergere ecran, cordonatele x=10, y=20 (x este pe orizontală – spre dreapta, y este pe verticală – în jos) și textul de afișat *Dus-Intors*. Următorul bloc care trebuie introdus este *Sound* configurat cu sunetul *MINDSTORMS* din fișierul aflat în grupul *Communication*, pentru redare repetată. Urmează apoi trei blocuri *Move* pentru deplasarea înainte (*Move Steering*), rotire (*Move Tank*) și iar înainte (*Move Steering*). Înainte de blocul *Stop Program* se reface ecranul cărămizii folosind blocul *Display* cu opțiunea *Reset Screen*. În Figura 9 este programul descris anterior.

Fig. 9: Program pentru deplasarea robotului cu sunete și afișări pe ecran

Observații

În mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3 proiectele pot conține unul sau mai multe programe, care pot fi lansate în execuție pe rând. Proiectele ce conțin programele sunt scrise pe calculator și apoi copiate pe cărămidă.

Programe care folosesc senzori și variabile

În continuare vom prezenta modul de folosire a senzorilor și a variabilelor pentru a realiza programe cât mai diverse.

Fig. 10: Senzori pentru roboți LEGO Minstorms EV3

Problema detectării culorii unui obiect

În multe situații este nevoie să cunoaștem ce culoare are un obiect. Spre exemplu, dacă robotul se deplasează pe o suprafață cu diverse culori este util să știm la fiecare moment pe ce culoare se află, pentru a corecta deplasarea.

Programul din Figura 11 determină afișarea pe ecranul cărămizii a valorii asociate culorii pe care se află senzorul de culoare (*Colour Sensor*) al robotului.

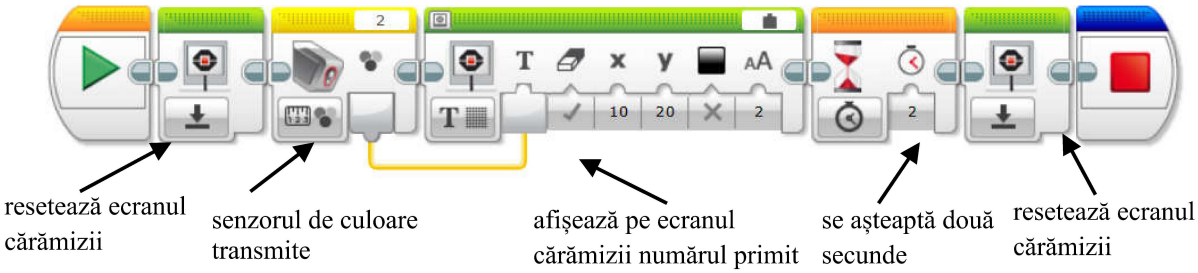

resetează ecranul cărămizii
senzorul de culoare transmite
afișează pe ecranul cărămizii numărul primit
se așteaptă două secunde
resetează ecranul cărămizii

Fig. 11: Program cu senzor de culoare

Problema detectării distanței până la un obiect

Senzorul care ne permite să determinăm distanța de la robot până la un obiect este cel infraroșu (*Infrared Sensor*). Pentru măsurarea distanței folosește percent-ul notat cu *pct*, 100 $pct = 70\ cm$. Programul din Figura 12 afișează pe ecranul cărămizii distanța de la senzor la un cub.

Fig. 12: Program cu senzor de distanță

Problema detectării obiectelor prin atingere

Senzorul tactil (*Touch Sensor*) ne permite detectarea obiectelor atinse de vârful acestuia. În funcție de modul de atingere acesta transmite una din valorile 0, 1, 2. Programul din Figura 13 afișează una dintre aceste valori.

Fig. 13: Program cu senzor tactil

Grupul *Sensor* conține blocuri pentru mai mulți senzori, trei dintre ele fiind folosite mai frecvent (aceștia sunt în kit-ul de bază):

1. *Touch Sensor* (senzor tactil – folosit la măsurarea gradului de atingere a obiectelor: 1, 2, 3)
2. *Infrared Sensor* (senzor infraroșu – folosind la identificarea obiectelor de la o distanță precizată, unitatea de măsură este *pct*, $100pct{=}70cm$)
3. *Colour Sensor* (senzor de culoare – folosit la identificarea culorilor, de cele mai multe ori pe suprafața pe care se deplasează robotul, culorile au asociate numere 0 - culoare nedefinită, 1 - negru, 2 – albastru, 3 – verde, 4 – galben, 5 – roșu, 6 – alb, 7 - maro).

La toți senzorii, în căsuța din dreapta-sus trebuie introdus numărul portului unde este conectat la cărămidă. În cazul în care cărămida este conectată la calculator, atunci numărul portului este completat automat.

Problema numărului aleator

Folosind *generatorul de numere aleatoare* vrem să obținem un număr de două cifre și să afișăm pe ecranul cărămizii, la un interval de 10 secunde, numărul urmat de pătratul său. În programul următor sunt prezentate blocurile utilizate.

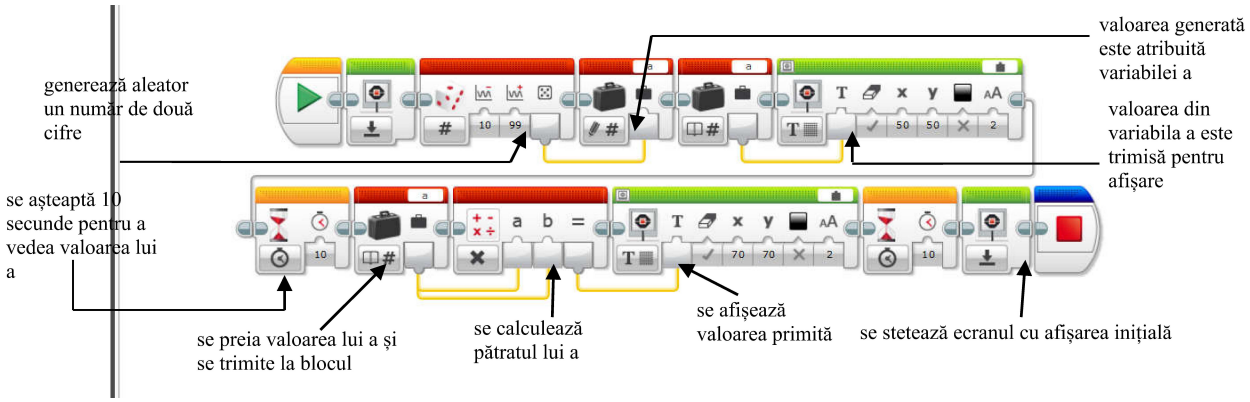

generează aleator un număr de două cifre
valoarea generată este atribuită variabilei a
valoarea din variabila a este trimisă pentru afișare
se așteaptă 10 secunde pentru a vedea valoarea lui a
se preia valoarea lui a și se trimite la blocul
se calculează pătratul lui a
se afișează valoarea primită
se stetează ecranul cu afișarea inițială

Fig. 14: Program cu variabile inițializate cu valori generate aleator

Programul conține câteva blocuri noi: *Random* – pentru generarea unui număr natural cuprins între două valori date, *Variable* – pentru a realiza operația de creare, atribuire și folosire a valorii unei variabile, *Math* – pentru operații aritmetice, din grupul *Data Operations*.

Grupul *Data Operations* conține blocuri pentru lucrul cu variabile, operatori și expresii.

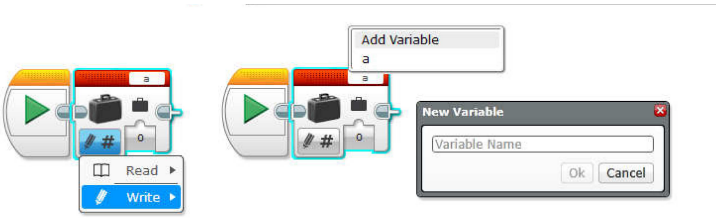


Fig. 15: Crearea unei variabile

Blocurile cele mai utilizate din grupul *Data Operations* sunt:

1. *Variable* – cu două stări: *Read*, pentru folosirea valorii și *Write*, pentru modificarea valorii (Figura 15).
2. *Constant* – pentru a crea date constante, ce pot fi folosite în program numai cu valoarea dată la definirea lor.
3. *Random* – permite generarea unui număr aleator dintr-un interval de valori specificat sau a valorilor *true* sau *false* (de tip logic).
4. *Logic Operations* – pentru operațiile logice (și, sau, negație). Valorile pentru care se realizează operația se vor introduce în bloc.
5. *Math* – pentru operații aritmetice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, etc.).
6. *Compare* – pentru operațiile de comparare (folosind operatorii relaționali). Rezultatul acestui bloc este o valoare logică.

Atât pentru variabile, cât și pentru constante, se utilizează trei tipuri de date: numerice, text și logic.

Problema deplasării pe un traseu în formă de dreptunghi

Generați aleator numărul de rotații pe care să le parcurgă un robot pe laturile unui dreptunghi (adică lungimile laturilor măsurate în rotații de motor), pentru lungime din mulțimea {4,5,6}, iar pentru lățime din mulțimea {2,3,4}, apoi deplasați robotul pornind dintr-un colț și la final reveniți în aceeași poziție. Toate operațiile specificate se vor realiza cu același program.

Soluție

Pentru rezolvarea problemei vom folosi două variabile numerice, cu numele a – pentru lungime, b - pentru lățime. Crearea lor se va realiza cu două blocuri *Variable*, iar pentru inițializarea lor se vor utiliza numerele generate de blocul Random folosit de două ori, cu limitele de valori 4 și 6 pentru a, respectiv 2 și 4 pentru b. Apoi sunt folosite blocurile *Move Stering* și *Variable*, cu opțiunea *Read*, pentru numărul de rotații, ca să se deplaseze robotul. În Figura 16 este prezentat programul.

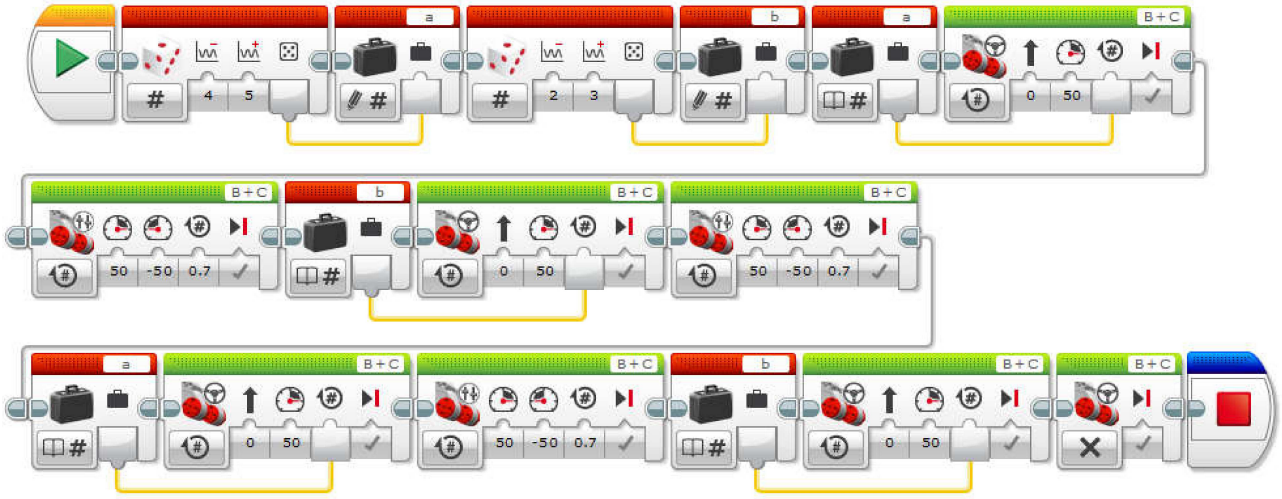


Fig. 16: Program pentru deplasarea robotului pe un contur dreptunghiular

Probleme propuse

1. Se consideră programul următor:

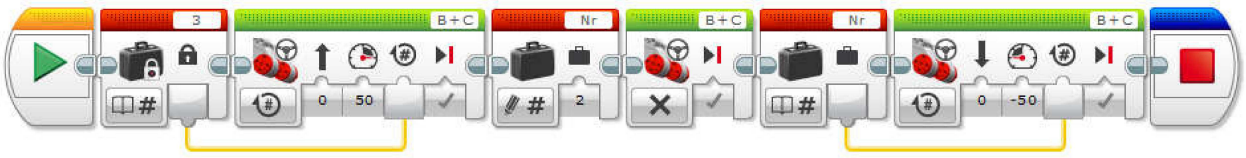


Fig. 17: Program pentru deplasarea unui robot LEGO Minstorms EV3

Cum se deplasează robotul, dacă se folosește acest program? Explicați care este rolul fiecărui bloc.

2. Se consideră programul din Figura 18. Care este efectul acestui program, dacă senzorul de culoare se află deasupra unei planșe de culoare albă?

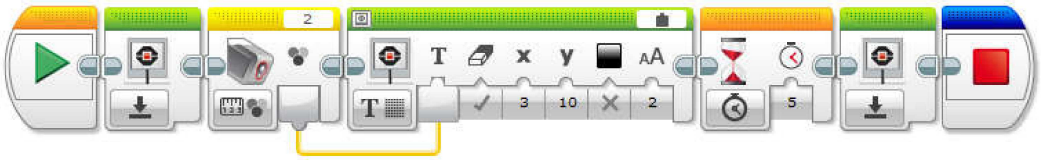


Fig. 18: Program cu senzor de culoare

Pentru fiecare din problemele următoare scrieți câte un program folosind mediul interactiv de programare Mindstorm Education EV3.

3. Generați aleator trei numere naturale din mulțimea {1, 2, ..., 10} și apoi afișați pe ecranul cărămizii, pentru 5 secunde, suma lor.

4. Modificați programul de la **Problema deplasării pe un traseu în formă de dreptunghi** astfel încât deplasarea să se realizeze pe conturul unui pătrat.

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de informatică pentru clasa a V-a*, Editura CD-Press, 2017.

[2] *Minstorms EV3 – Ghid de Utilizare*, LEGO Group, 2013.

[3] L. Negrescu, L. Negrescu, *Construirea și programarea roboților LEGO Minstorms EV3*, Editura Albastră, 2015.

[4] J. Olayvar, E. Lindberg, *LEGO Mindstorms EV3 Programming Basics*, Washington State Library, 2016.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Ana Maria Iordache [1] *și Mădălina Enache* [2]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $2^{-1} \cdot 0,(3) - 1 : 6$ este ...
2. Dacă $\frac{2x}{7} = \frac{10}{4y}$, atunci 10% din xy este ...
3. Un unghi al unui triunghi are măsura egală cu 33°12”. Suma celorlalte unghiuri ale triunghiului este egală cu ...
4. Cardinalul mulțimii $\mathbb{Z} \cap [-2, 3)$ este ...
5. Cubul PROBLEMA are muchia de 6 cm. Aria patrulaterului POML este ... cm^2.
6. Un elev are evidența mesajelor primite pe telefon de la prietenii săi într-o săptămână, redată în tabelul de mai jos:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Numărul mesajelor primite	17	12	18	6	14	20	18

Numărul mediu de apeluri primite pe zi este ...

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați o piramidă triunghiulară regulată $SABC$.
2. a) Demonstrați că numărul $A = (x^2 + x)(x^2 + x - 20) + 100$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.
   b) Determinați o valoare naturală a lui x pentru care A este cub perfect.
3. Calculați opusul numărului $\left|2\sqrt{3} - 1\right| - \frac{4}{\left|1-\sqrt{3}\right|}$.
4. Ana are o sumă de bani. După ce cheltuiește o zecime din sumă, restul îl împarte în mod egal cu fratele ei, Dan. În vacanță, Ana își triplează suma, iar Dan și-o înjumătățește pe a sa, ajungând să aibă împreună 315 lei. Câți bani a avut Ana inițial?
5. Dacă $x > 0$ și $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$, calculați $x + \frac{1}{x}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Figura următoare reprezintă curtea unei pensiuni formată din parcul $ABCD$ și rondurile cu flori în formă de semicerc. Ştim că $AB = 20$ m, $DC = 10$ m și $AD = BC = 16$ m, $AB \| CD$.

[1] Profesor, Liceul tehnologic ,,Virgil Madgearu”, Roșiorii de Vede, anamariayord@yahoo.com
[2] Profesor, Liceul tehnologic ,,Virgil Madgearu”, Roșiorii de Vede, emadimate@yahoo.com

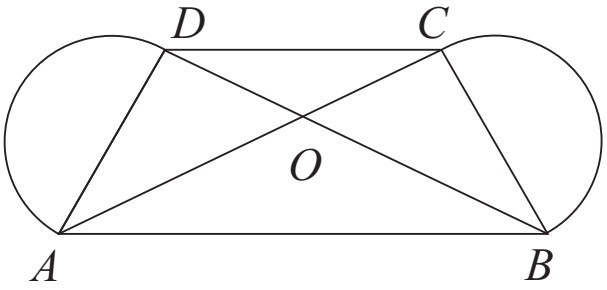


Figura 1

a) Aflați suprafața rondurilor cu flori.
b) Determinați perimetrul curții.
c) Aflați cu cât la sută este mai mare aria triunghiului AOB față de aria triunghiului DOC, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

2. O cutie sub forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile proporționale cu primele trei numere naturale prime și suma tuturor muchiilor 120 cm.
   a) Aflați câți cm^2 de carton au fost necesari pentru confecționarea cutiei.
   b) Determinați o funcție trigonometrică a unghiului format de dreptele $D'B$ și AD.
   c) Este posibilă introducerea în cutie a unei rigle având lungimea de 20 cm?

Testul 2

Florin Stănescu [3]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $5 - 2^2 \cdot (4^2 - 15)$ este ...
2. Dacă $4^n = 64$, atunci n este egal cu ...
3. La aruncarea unui zar probabilitatea de a obține un număr prim este egală cu ...
4. Diagonala unui pătrat cu aria de 16 cm^2 este egală cu ... cm
5. Se consideră cubul $ABCDMNPQ$. Măsura unghiului format de dreptele AB și DQ este egală cu ....
6. În tabelul de mai jos este reprezentată situația notelor obținute de elevii unei clase la un test de evaluare:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	7	4	5	4	2	1

Media clasei este egală cu ...

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați pe foaia de examen piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V și baza $ABCD$.
2. Fie a, b, c trei numere astfel încât $2a+b+2c = 11$ și $a+2b+c = 4$. Calculați $(a+c)^2 - b^2$.
3. Un casier, fiind întrebat cât a încasat într-o zi, a răspuns: dacă aș fi încasat încă 25% din cât am încasat și încă 500 lei, aș fi obținut 5500 lei. Cât a încasat în ziua respectivă casierul?

[3] Profesor, Școala Gimnazială „Șerban Cioculescu”, Găești, florin.florinstanescu@yahoo.com

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Determinați a, astfel încât punctul $A(1, 3)$ aparține graficului funcției f.
   b) Pentru $a = 1$, determinați sinusul unghiului format de axa Ox cu graficul funcției f.
5. Se consideră expresia

$$E(x) = \left(\frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{x^2-1}\right) : \frac{x-2}{x^2-2x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}.$$

Determinați $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1, 2\}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. În Figura 1 este ilustrat schematic un teren de fotbal. Cele două careuri sunt reprezentate prin două dreptunghiuri $EFIJ$, respectiv $GHKL$, care au lungimea dublul lățimii, suprafața din mijlocul terenului este un cerc de centrul O și diametrul de 15 m, iar $ABNM$ este dreptunghi. Avem: $PQ = EF = GH = AE = FB = DH = GC = NP = MQ$ și $AM = MD = 50$ m.
   a) Stabiliți dacă suprafața terenului de fotbal, fără cele două careuri și cercul de la mijlocul terenului, este mai mare decât 3390 m^2. $(3,14 < \pi < 3,15)$
   b) Doi jucători, plecând în același timp, aleargă în linie dreaptă cu aceeași viteză pe următoarele trasee: primul jucător: $D - N - A$, al doilea jucător: $F - N - M - H$. Care dintre cei doi jucători termină primul alergarea?
   c) Aflați sinusul unghiului EOF.

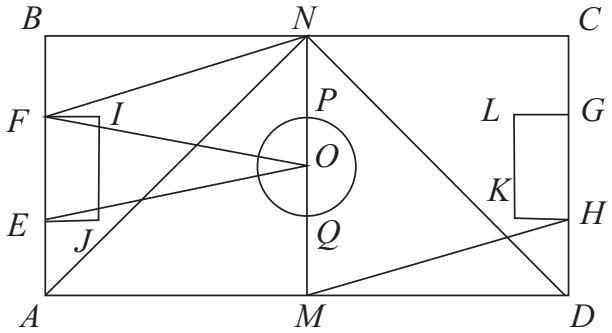


Figura 1

2. În Figura 2, este reprezentată o cutie sub forma unei prisme drepte $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat. Prisma are aria bazei egală cu 100 dm^2, iar suma ariilor fețelor laterale ale prismei este de 200 dm^2.
   a) Arătați că înălțimea cutiei este $BB' = 5$ dm.
   b) Aflați distanța de la punctul A' la dreapta AC'.
   c) Aflați sinusul unghiului format de diagonalele prismei AC' și $A'C$.

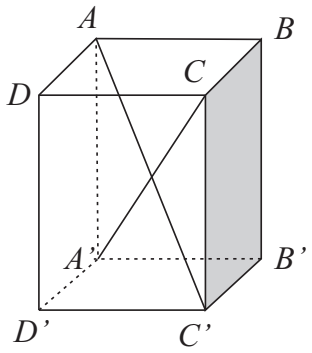


Figura 2

Testul 3

Adina Florina Militaru [4]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $2018^0 + 0^{2018} + 2018 : 2$ este ...
2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, atunci $\frac{2a}{3b}$ este egal cu ...
3. Lungimea razei cercului circumscris unui pătrat este egală cu $4\sqrt{2}$ cm. Aria pătratului este ... cm^2.
4. Două unghiuri complementare congruente au măsurile egale cu ...
5. Aria laterală a unui con circular drept cu raza de 3 cm și înălțimea de 4 cm este egală cu ... π cm^2.
6. În tabelul de mai jos sunt reprezentate notele obținute de elevii unei clase la teza de la matematică:

Note	sub 5	5 – 5,99	6 – 6,99	7 – 7,99	8 – 8,99	9 – 9,99	10
Număr elevi	1	3	4	3	5	7	2

Numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 7 este egal cu ...

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați pe foaia de examen un paralelipiped dreptunghic $PROMQVAT$.
2. Calculați media aritmetică a numerelor $a = (3 + \sqrt{2})^2$ și $b = (3 - \sqrt{2})^2$.
3. Alina își propune să citească o carte în trei zile. În prima zi vrea să citească jumătate din ea, a doua zi un sfert și încă 20 de pagini, iar a treia zi cu 5 pagini mai puțin decât jumătate din a doua zi. Câte pagini are cartea?
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.
   a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de coordonate xOy.
   b) Determinați aria triunghiului format de graficul funcției și axele de coordonate.
5. Se consideră expresia

$$E(x) = \left[\frac{1}{x} + \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{x(x+1)}\right] \cdot \frac{x-1}{x-2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}.$$

Arătați că $E(x) = \frac{1}{x}$.

[4] Profesor, Liceul Tehnologic Construcții de Mașini, Mioveni, popescuadina73@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în A, având bazele $AB = 14$ cm și $CD = 10$ cm, iar $m(\sphericalangle B) = 30°$.
   a) Determinați lungimea liniei mijlocii a trapezului.
   b) Determinați aria trapezului.
   c) Calculați distanța de la vârful C la diagonala BD.
2. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile de 6 cm, 4 cm, respectiv 3 cm.
   a) Calculați lungimea diagonalei paralelipipedului.
   b) Ştiind că pentru acoperirea unui cm^2 se folosesc 10 g vopsea, calculați câte kg de vopsea sunt necesare pentru acoperirea întregului corp.
   c) Câți litri de apă încap în paralelipiped?

Testul 4

Mugurel Simion [5]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $18 \cdot 6 - 18 : 6$ este egal cu $\ldots$.
2. Numerele întregi din intervalul $(-2, 6]$ sunt în număr de $\ldots$.
3. Şase robinete de același debit pot umple un bazin în 8 ore. Două robinete vor umple același bazin în $\ldots$ ore.
4. Aria unui pătrat este 81 cm^2. Perimetrul pătratului este egal cu $\ldots$ cm.
5. Lungimea înălțimii unui con circular drept cu raza bazei egală cu 8 cm și generatoarea de 16 cm este egală cu $\ldots$.
6. Numărul elevilor dintr-un lot de handbal și vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos:

Vârsta (ani)	11	12	13
Numărul elevilor	5	10	5

   Media de vârstă a lotului de elevi este egală cu $\ldots$ ani.

SUBIECTUL al II-lea

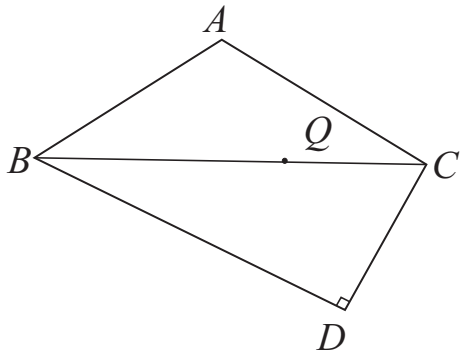
1. Desenați un cilindru circular drept cu secțiunea axială dreptunghiul $ABB'A'$.
2. Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care prin împărțire la 14 și 21 dă de fiecare dată restul 3.
3. Un turist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi a parcurs $\frac{2}{7}$ din lungimea traseului. A doua zi a parcurs 20% din rest, iar a treia zi a parcurs ultimii 24 de km. Aflați lungimea traseului.
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 6$.
   a) Arătați că: $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{3} - 5) = -10$.
   b) Determinați punctele $M(x, y)$ situate pe graficul funcției f cu proprietatea $\left|x\right| = \left|y\right|$.

[5] Profesor, Școala Gimnazială „Constantin Brâncoveanu”, Ștefănești, simion_34@yahoo.com

5. Se consideră expresia:
$$E(x) = (x+1)(x^2+2x-24).$$
Arătați că $6|E(x)$, pentru oricare x număr întreg.

SUBIECTUL al III-lea

1. Figura următoare reprezintă schița unui teren. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC = 20$ cm și $m(\sphericalangle BAC) = 120°$. Triunghiul BDC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle BDC) = 90°$ și $DC = 10\sqrt{3}$ cm.



   a) Arătați că $BC = 20\sqrt{3}$ cm.
   b) Arătați că $\mathcal{A}_{\triangle ACD} = 100\sqrt{3}$ cm^2.
   c) Dacă $Q \in (BC)$ astfel încât $BQ = 12\sqrt{3}$ cm, verificați dacă punctele A, Q și D sunt coliniare.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = 6$ cm, $AA' = 8$ cm, $BD \cap AC = \{P\}$ și $BC' \cap B'C = \{Q\}$.
   a) Arătați că volumul prismei este egal cu 288 cm^3.
   b) Arătați că sinusul unghiului format de dreptele PQ și $B'D'$ este egal cu $\dfrac{\sqrt{82}}{10}$.
   c) Aflați distanța de la punctul A' la planul $(AB'D')$.

Testul 5

Adrian Ţurcanu [6]

SUBIECTUL I

1. Inversul numărului rațional 0,25 este numărul natural ...
2. Aria unui romb cu diagonalele de 12 cm și 7 cm este ... cm^2.
3. Soluția negativă a ecuație $(x+5)^2 = 121$ este ...
4. Cel mai mare număr natural din intervalul $[-3, 8)$ este ...
5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Măsura unghiului dintre dreptele $B'C$ și AD' este ...
6. Notele obținute de elevii clasei a VIII-a A la teza la matematică din semestrul I sunt date în tabelul de mai jos:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	3	3	5	5	11

[6] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, adrianturcanu85@yahoo.com

Conform tabelului, probabilitatea ca alegând un elev din Clasa a VIII-a A, acesta să fi obținut la teză o notă mai mare sau egală cu 8 este ...

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați prisma patrulateră regulată $MATEINFO$.
2. Arătați că numărul $N = (3-\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2}+5)(3-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+5)^2$ este natural.
3. Un turist a parcurs un traseu în trei zile astfel: în prima zi o cincime din drum, a doua zi jumătate din rest, iar a treia zi ultimii 10 km. Aflați lungimea traseului.
4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$.
   a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de coordonate xOy.
   b) Determinați numărul natural nenul n care verifică egalitatea $f(1)+f(2)+\ldots+f(n) = 150$.
5. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| \leq 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{10}{x+1} \in \mathbb{Z}\}$. Determinați $A \cap B$.

SUBIECTUL al III-lea

1. O grădină are forma unui trapez isoscel $ABCD$ cu $AB = 100$ m, $CD = 40$ m și $BC = AD = 50$ m.
   a) Calculați lungimea gardului care împrejmuiește grădina.
   b) Calculați aria suprafeței grădinii.
   c) Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, determinați aria triunghiului MDC.
2. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei $BC = 12$ cm, M mijlocul lui $[BC]$, $VM = 6$ cm și VO înălțimea acesteia.
   a) Aflați aria laterală și volumul piramidei.
   b) Dacă N este mijlocul laturii $[CV]$ arătați că $MN \parallel (VOB)$.
   c) Arătați că $VA \perp VM$.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Determinați partea imaginară a numărului complex $z = \dfrac{5-4i}{2+3i}$, unde $i^2 = -1$.
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + m - 2$ să fie $-\dfrac{1}{4}$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\log_3 x + \log_x 3 = \dfrac{5}{2}$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă trei elemente.
5. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB, unde $A(2, -1)$, $B(-4, 1)$.
6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 2$, $BC = 3$ și $AC = 4$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(X) = \begin{pmatrix} 1+3x & 9x \\ x & 1+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   a) Calculați $\det A(-1)$.
   b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 6xy)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
   c) Calculați $A^{-1}(1)$.
2. Pe $G = (1, \infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.
   a) Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$.
   b) Demonstrați că legea „$\circ$” este asociativă.
   c) Rezolvați în G ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2018 ori } x} = x$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 \cdot e^{-x}$.
   a) Determinați ecuația asimptotei la G_f spre $+\infty$.
   b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.
   c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)} + 1\right)$.
2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.
   a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (ax + b) \cdot \sqrt{x}$ să fie o primitivă a lui f.
   b) Calculați $\int_1^4 f(x)g^2(x)dx$, unde a și b au valorile determinate la punctul a).
   c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h : [2, 3] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât 2, x^2+3x și 8 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2. Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(4,\infty)$, $f(x)=2^x+4$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x-6}-x=0$.
4. Câte numere naturale de 4 cifre distincte se pot forma cu elemente din $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.
5. Fie punctele $A(2,3)$, $B(-1,1)$ și $C(0,-2)$. Aflați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
6. Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 1 & 1 & 2a\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
   a) Calculați $\det A(0)$.
   b) Să se afle $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A(a)$ să fie inversabilă.
   c) Să se determine $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(3)\cdot X=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\frac{4x+4y}{4+xy}$. Fie $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_5\frac{2+x}{2-x}$.
   a) Demonstrați că legea „$\circ$” este asociativă.
   b) Demonstrați că $f(x\circ y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in G$.
   c) Să se determine simetricul lui $1\in G$ față de legea „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.
   a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=e$, situat pe graficul funcției f.
   b) Demonstrați că $\ln x\le x-1$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.
   c) Determinați intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f.
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x}$.
   a) Arătați că $\int_{-1}^{1} e^x\cdot f(x)dx=4$.
   b) Calculați $\int_0^1 f''(x)dx$.
   c) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(\ln x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ să fie egală cu $\frac{5}{2}$.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

Testul 3

Mihai Florea Dumitrescu [3]

SUBIECTUL I

1. Aflați suma elementelor mulțimii $A = \{x \in [-1;1] \,|\, [x] \cdot x = 1\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 4x - 4$. Aflați distanța dintre vârfurile parabolelor asociate celor două funcții.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $9^{\log_3 x} \leq 2 \cdot 3^{\log_3 x} - 1$.
4. Câte numere pare de trei cifre se pot forma cu cifrele $0, 1, 2, 3$?
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -5)$ și $B(-3, 1)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.
6. Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 2x + \cos^2 3x + \operatorname{tg}^2 4x + \operatorname{ctg}^2 6x, x \in R$. Calculați $E\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \end{pmatrix}$, $B(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
   a) Arătați că $\det[A(x,y) \cdot B(x,y)] = 0$ pentru orice numere reale x și y.
   b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det[A(x,x) \cdot B(x,x) + xI_3] = 4x$.
   c) Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $\det[B(x,y) \cdot A(x,y)] = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - x - y + 2$.
   a) Arătați că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$ pentru orice numere reale x și y.
   b) Aflați numărul $n \in \mathbb{N}$ care verifică egalitatea $C_n^1 * C_n^2 = 1$.
   c) Calculați $2 * 3 * 4 * ... * 2018$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$.
   a) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.
   c) Arătați că $2\cos 1 \leq \pi - 2$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
   a) Arătați că $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} \cdot f(x)\, dx = \frac{4}{3}$.
   b) Calculați $\int_1^2 f(x)\, \mathrm{d}x$.
   c) Aflați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x)}$.

[3] Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

Testul 4

Gheorghe Nistor [4]

SUBIECTUL I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 = 10$ și $a_5 = 16$, să se calculeze a_{100}.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(f \circ f)(x) = 7$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $2\log_2 x + 1 \leq 5$.
4. Aflați probabilitatea ca alegând o funcție $f : \{1, 2, 3\} \to \{7, 8, 9\}$, aceasta să fie bijectivă.
5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin $A(0, 3)$ și e perpendiculară pe dreapta determinată de punctele $B(0, 2)$ și $C(-1, 4)$.
6. Să se afle raza cercului circumscris triunghiului ABC cu lungimile laturilor $AB = 7$, $BC = 8$ și $AC = 9$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx + y + 2z = 4 \\ 2x + my + z = 3 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$ și matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, unde m este un număr real.
   a) Calculați $\det A(0)$.
   b) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(m)$ nu este inversabilă.
   c) Rezolvați sistemul pentru $m = 1$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + mX^2 + 2X + n$ unde $m, n \in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie divizibil cu $g = X^2 - 3X + 2$.
   b) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 = 1 + i$ să fie rădăcină pentru f.
   c) Pentru $m = n = 0$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.
   a) Calculați $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
   b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
   c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\ln x$.
   a) Să se determine o primitivă F a lui f pentru care $F(1) = \dfrac{3}{4}$.
   b) Calculați $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln x}{xf(x)}dx$.
   c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x + 1}$.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, ghe.nistor@yahoo.com

Testul 5

Alina Ștefan [5]

SUBIECTUL I

1. Arătați că numărul $n = \log_3\left(9\sqrt[3]{9}\right) + 8^{\log_2 3} - \dfrac{8}{3}$ este număr natural.
2. Aflați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ cu axa absciselor.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x} = \dfrac{2}{3}$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de 3 cifre, acesta să fie cub perfect.
5. Fie vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{i} - (m-1)\overrightarrow{j}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5$.
6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului MNP, știind că $M = \dfrac{\pi}{6}$, $N = \dfrac{\pi}{3}$ și $MN = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + a \cdot A$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Calculați $\det(A^2)$.
   b) Verificați dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
   c) Determinați $X^{2018}(1)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii lui f la $X - 2$ să fie 4.
   b) Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\dfrac{9}{2}, \infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.
   c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 9$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \ln x$.
   a) Calculați $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{f(x) - f(e)}{x - e}$.
   b) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptote.
   c) Demonstrați că $f(x) \geq -\dfrac{1}{3e}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^\star$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^2 + 4}$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_1^2 f_2\left(\sqrt{x}\right) dx = 1 - 4\ln\frac{6}{5}$.
   b) Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 f_{n+2}(x)dx + 4\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1}$.
   c) Să se determine $a > 1$ astfel încât aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = a$ să fie egală cu $\ln 2$.

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, alinastanescu2000@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Daniel Jinga [1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Determinați numerele reale a, b știind că $(a+bi)(b+ai)=(a-bi)(b-ai)$, unde $i^2=-1$. **(5p)**

2. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(m-3)x+m-4$ are valoarea minimă egală cu 0. **(5p)**

3. Rezolvați ecuația $6^x-2^x-2\cdot 3^x+2=0$. **(5p)**

4. Aflați $n\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea $C_{n+2}^{n^2}=1$. **(5p)**

5. În triunghiul ABC, $AB=3$, $BC=6$, $AC=4$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. **(5p)**

6. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{2}$. Calculați $\sin 2x$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+my-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că matricea sistemului are rangul 2 pentru orice $m\in\mathbb{R}$. **(5p)**

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil. **(5p)**

c) Aflați soluțiile $(x,y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x^2+y^2+z^2=42$. **(5p)**

2. Fie $G=(-1,1)$ și $x*y=\dfrac{x+y}{1-xy}$, $\forall\, x,y\in G$.

a) Arătați că $\operatorname{tg}27^\circ * \operatorname{tg}18^\circ=1$. **(5p)**

b) Arătați că $(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall\, x,y,z\in G$. **(5p)**

c) Rezolvați în G ecuația $x*x*x=2x*2x*2x$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$.

a) Arătați că $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. **(5p)**

b) Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa ordonatelor. **(5p)**

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^{\frac{1}{nf(n)}}$. **(5p)**

[1] Profesor, Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, jinga.daniel@yahoo.com

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-x^2$ și $I_n=\int_0^2 f^n(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $I_1=\frac{4}{3}$. **(5p)**

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent. **(5p)**

c) Arătați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, $\forall\, n\geq 2$. **(5p)**

Testul 2

Sorin Ulmeanu [2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-1|=2x-5$. **(5p)**

2. Fie ecuația $x^2-2x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$, care are soluţiile reale x_1 și x_2. Ştiind că $|x_1-x_2|=1$, să se determine m. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$, $x\in\mathbb{R}$. **(5p)**

4. Să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$, $\forall\, x\in(-1,1)$ este impară. **(5p)**

5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine a, $b\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$. **(5p)**

6. Să se determine ecuația medianei din A a triunghiului ABC, știind că $A(2,2)$ și că ecuațiile medianelor duse din B și C sunt $2x+y-2=0$, respectiv $x-y+2=0$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul (S): $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=-1 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $(a+2)(a-1)^2$. **(5p)**

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât (S) să nu fie compatibil. **(5p)**

c) Aflați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât soluția unică (x_0,y_0,z_0) a sistemului (S) să formeze o progresie aritmetică de rație $r=-\frac{2}{5}$. **(5p)**

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\{\cos(q\pi)+i\sin(q\pi)\,|\,q\in\mathbb{Q}\}$.

a) Să se arate că $z=0$ nu se află în G și că $\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se află în G. **(5p)**

b) Să se arate că înmulțirea numerelor complexe determină pe G o structură algebrică de grup comutativ. **(5p)**

c) Să se arate că polinomul $f=X^6-1$ are toate rădăcinile în G. **(5p)**

[2] Profesor, Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, sorinulm@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consderă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x - \sin x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare. **(5p)**

b) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptote. **(5p)**

c) Să se arate că $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$. **(5p)**

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat prin $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_2. **(5p)**

b) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0. **(5p)**

Testul 3

Ileana Ţârcă [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Calculați partea reală a numărului complex $(1-5i)^2$. **(5p)**

2. Rezolvați ecuația $\sqrt[3]{15-\sqrt{x-4}} = 2$. **(5p)**

3. Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Determinați probabilitatea ca alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact 3 elemente. **(5p)**

4. Fie f_m, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 + mx + m$ și $g(x) = x + 2$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $G_{f_m} \cap G_g$ are un singur element. **(5p)**

5. Fie dreptele d_1: $mx + 2y + 1 = 0$, $d_2 : x + (m+1)y + 5 = 0$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $d_1 \parallel d_2$. **(5p)**

6. Să se calculeze $\sin^2 1480^\circ + \cos^2 2200^\circ$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2. **(5p)**

b) Să se calculeze rangul matricei $A + B$. **(5p)**

c) Să se calculeze $m \cdot n$, unde m este cel mai mic număr natural nenul pentru care $(A \cdot B)^m = O_3$ și n este cel mai mic număr natural nenul pentru care $(B \cdot A)^n = O_3$. **(5p)**

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

[3] Profesor, Liceul de Arte ,,Dinu Lipatti", Pitești, ileana_tirca@yahoo.ro

a) Să se calculeze $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$. **(5p)**

b) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$. **(5p)**

c) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raţionale. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-2, 2)$. **(5p)**

b) Verificați dacă funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2, 2)$. **(5p)**

c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f. **(5p)**

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. **(5p)**

b) Calculați $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$. **(5p)**

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$. **(5p)**

Testul 4

Mihai Florea Dumitrescu [4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Aflați suma elementelor mulțimii $A = \left\{ \left[\dfrac{1}{x} \right] \mid x \in \mathbb{Z}^* \right\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. **(5p)**

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax + 1$. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care distanța de la axa de simetrie a parabolei asociate funcției f la axa Oy este egală cu 2. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuaţia $|x-1|^3 = (1-x)^2$. **(5p)**

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, cu cifre nenule și diferite, acesta să aibă cifra zecilor pătrat perfect și cifra unităților cub perfect. **(5p)**

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -5)$ și $B(-3, 3)$. Determinați simetricul punctului O față de dreapta AB. **(5p)**

6. Se consideră expresia, $E(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ unde $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ştiind că $\sin 2x = \dfrac{1}{4}$, arătați că $E(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **(5p)**

[4] Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det A(0)$. **(5p)**

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det A(\log_2 x) = 0$. **(5p)**

c) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = A(ab+2) + (a+b) \cdot A(0)$, pentru orice numere reale a și b. **(5p)**

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + aX + b$, unde a, $b \in \mathbb{R}$ și fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului.

a) Aflați a și b știind că polinomul $X^2 + 1$ divide polinomul f. **(5p)**

b) Pentru $b = 1$, există $a \in \mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea **(5p)**

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3} = 2\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}\right) + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}?$$

c) Arătați că, pentru $b = 1$ și $a \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ polinomul f are toate rădăcinile reale. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x$.

a) Arătați că funcția f este inversabilă. **(5p)**

b) Arătați că $2(2 - \sqrt{3})(3 \sin 1 + \pi) > 3$. **(5p)**

c) Arătați că $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$, pentru orice $x, y \in [0, \pi]$. **(5p)**

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră integrala $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4 + 1} dx$.

a) Calculați I_3. **(5p)**

b) Calculați $\sum_{k=1}^{8} I_k$. **(5p)**

c) Calculați $\lim_{n \to \infty} nI_n$. **(5p)**

Testul 5

Antonio Nuică [5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine $\left|\frac{1 - 3i}{2 + i}\right|$. **(5p)**

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$. **(5p)**

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $mx^2 - mx + 1 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

4. Să se determine numărul funcțiilor injective $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea $f(1) = 1$. **(5p)**

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin 2x = \sin x$. **(5p)**

6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, pentru care $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 4$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie $G = (a, \infty)$, $a > 0$ și $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, $x, y \in G$.

a) Să se arate că G este parte stabilă relativ la legea de compoziție $\circ$. **(5p)**

b) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ. **(5p)**

c) Să se determine inversul elementului $a + 1$ în grupul G. **(5p)**

2. Se consideră sistemul (S): $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică. **(5p)**

b) Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$. **(5p)**

c) Să se rezolve sistemul pentru $m = 1$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul lui f. **(5p)**

b) Să se studieze monotonia lui f. **(5p)**

c) Să se determine ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(0, -1)$. **(5p)**

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{7x + 8} dx$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_1. **(5p)**

b) Să se arate că $7I_{n+1} + 8I_n = \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$. **(5p)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Eduard Asadurian [1]

SUBIECTUL I

1. Fie mulțimea

$$M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \mid \ x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset M_3(\mathbb{R}).$$

   a) Arătați că $(M, *)$, unde $A(x) * A(y) = \frac{1}{2}A(x)A(y)$, este un grup comutativ, izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbb{R}^*$.
   b) Rezolvați ecuația

$$\underbrace{A(x) * A(x) * \cdots * A(x)}_{\text{de } n \text{ ori}} = \underbrace{A(x) + A(x) + \cdots + A(x)}_{\text{de } n \text{ ori}} \text{ în } \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}.$$

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0$, știind că are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{x_n^2-1}$, $\forall n \geq 1$. Să se studieze convergența șirului (x_n).
2. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{e^{nx}+2}{e^{nx}-1} dx.$$

SUBIECTUL al III-lea

Fie M și N două puncte pe laturile BC, respectiv AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC astfel încât $\overrightarrow{MC} = k_1\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{NC} = k_2\overrightarrow{NA}$. Fie $\{I\} = AM \bigcap BN$ și $\{P\} = CI \bigcap AB$. Presupunem cunoscute lungimile laturilor triunghiului ABC.

1. Aflați raportul $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IP}}$;
2. Deduceți valorile raportului $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IP}}$ în cazurile în care AM și BN sunt:

   a) mediane; b) bisectoare; c) înălțimi.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, ediasadurian@yahoo.com

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

Fie mulțimea $A = \left\{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Să se arate că $(A, +)$ este grup abelian.
2. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(X) = X^3 - 3X^2 + X + 1$ are o rădăcină $x_0 \in A$, cu $x_0 < 3$.
3. Să se arate că toate rădăcinile ecuației $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ se află în mulțimea A.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^2 + 2x + 5}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f_3.
2. Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției $g = f_3 - f_2$.
3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$, unde $I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(3, 1)$ și $C(1, 3)$.

1. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, să se determine coordonatele unui punct D din plan, $D \neq A$, astfel încât ariile triunghiurilor ABC și BCD să fie egale și punctele $A,\ M,\ D$ să fie coliniare.
2. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
3. Să se găsească două puncte E și F în cadranul IV astfel încât $AEFB$ să fie pătrat.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră

1. Să se rezolve ecuația $2^{\sqrt{x-2}} + 5^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 2$.
2. Să se calculeze $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n$.
3. Fie E_n o matrice pătratică de ordinul n cu toate elementele egale cu 1. Să se arate că:
   a) $E_n^2 = nE_n$;
   b) $I_n - E_n$ este inversabilă și să se arate că inversa ei este egală cu $I_n - \dfrac{1}{n-1}E_n$.
4. Pe mulțimea $G = (0, +\infty) - \{1\}$ se definește legea „$*$” astfel $x * y = x^{\ln y}$. Să se arate că „$*$” este o lege de compoziție pe G și să se demonstreze că $(G, *)$ este grup comutativ.
5. a) Combinări (definiție).
   b) Arătați că numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.
   c) Arătați că: $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com
[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

Analiză Matematică

1. Să se calculeze limita șirului $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + x - \alpha & , \quad x \leq 1 \\ x^{\frac{1}{x-1}} & , \quad x > 1 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se studieze continuitatea funcției.
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, unde $\omega \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze egalitatea
$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
4. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + a & , \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{b}}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$.
   a) Să se determine a și b astfel încât f să fie continuă.
   b) Să se calculeze primitivele funcției f pentru a și b determinați la punctul anterior.
5. Să se calculeze $\int_0^{\pi/4} \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$.

Geometrie

1. Fie ABC un triunghi și D, E, F picioarele înălțimilor din A, B, respectiv C. Să se arate că:
   a) tiunghiurile AEF, DEC, DBF sunt asemenea cu triunghiul ABC;
   b) bisectoarele triunghiului DEF coincid cu înălțimile triunghiului ABC.
2. Se dă un cerc și o coardă AB. Prin mijlocul C al arcului AB se duc două coarde oarecare ce intersectează cercul în D și E, iar coarda AB respectiv în F și G. Demonstrați că patrulaterul $DEGF$ este inscriptibil.
3. a) Fie ABC un triunghi cu lungimile laturilor egale cu 2, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$. Determinați unghiurile triunghiului.
   b) În orice triunghi avem $R(b + c) \geq a\sqrt{bc}$, notațiile fiind cele uzuale.
4. Fie ABC un triunghi și AD, perpendiculară pe planul său. Ducem $AE \perp BD$ ($E \in BD$) și $AF \perp DC$ ($F \in CD$). Arătați că patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil.
5. Într-un triunghi ABC fie D și E mijloacele laturilor BC, respectiv CA. Ştiind că $A(1, -1)$, $D(1, 2)$, $E(2, 0)$, determinați:
   a) să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC;
   b) ecuația cercului circumscris triunghiului ABC.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 1995)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Sorin Ulmeanu [1]

1. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

   a) $[-3,3]$; b) $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\bigcup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\infty\right)$; c) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; d) $\mathbb{R}$; e) $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$.
2. Mulțimea soluțiilor inecuației $\arccos\dfrac{2x}{x+1}>\dfrac{\pi}{3}$ este:

   a) (-1,1); b)$\emptyset$; c) [-1/3,1]; d) [-1/3,1/3); e) (-1,1/3]
3. Determinați cardinalul mulțimii
   $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,|\,x=\dfrac{n-1}{n^2+n};n\in\{-3,-2,1,2,3,...,12,13\}\right\}$.

   a) 14; b) 12; c) 10; d) 15; e) 13.
4. Să se determine pentru ce valori reale și pozitive x,y pentru care $x+y=50$, produsul $P=x^3y^2$ ia valoarea maximă.

   a) (25,25); b) (10,40); c) (30,20); d) (40,10); e) (20,30).
5. Să se determine cea mai mică valoare $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^n=e$, unde $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&1&4&3&8&2&5&7\end{pmatrix}$, iar e este permutarea identică din S_8.

   a) $n=8$; b) $n=12$; c) $n=9$; d) $n=8!$; e) $n=6$.
6. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]=l$, $a>0,\ a\neq1$.

   a) $l=\ln a$; b) $l=1$; c) $l=e$; d) $l=\infty$; e) $l=0$.
7. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ care verifică relațiile $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{e^x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $f(0)=1+\sqrt{2}$.

   a)$f(x)=e^x-\sqrt{e^x+1}$; b)$f(x)=e^x+\sqrt{e^{2x}+1}$; c)$f(x)=-e^x+\sqrt{e^x+1}$;
   d)$f(x)=-e^x-\sqrt{e^x+1}$; e)$f(x)=e^x$.
8. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{1}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$ cu elemente în $\mathbb{Z}_3$. Atunci inversa acesteia este:

   a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{2}&\hat{2}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{2}\end{pmatrix}$; b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{1}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$; c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{2}&\hat{2}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{2}\end{pmatrix}$

   d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{1}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$; e) A nu este inversabilă.
9. Determinați valoarea lui $I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

   a) $I=e\pi/4$; b) $I=\pi/4$; c) $I=e^2\pi/2$; d) $I=1$; e) $I=e^2$.

[1] Profesor, Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, sorinulm@yahoo.com

10. Determinați o relație de recurență în cadrul șirului $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $I_n = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

    a) $I_n = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$; b) $I_n = \frac{2n}{n+1}I_{n-1}$; c) $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$; d) $I_n = \frac{n}{2n+1}I_{n-1}$; e) $I_n = \frac{1}{n+1}I_{n-1}$.

11. Mulțimea S a soluțiilor inecuației $\dfrac{x+1}{x+2} \geq 0$ este:

    a) $(-\infty,-2)$; b) $(-\infty,-2) \bigcup (-1,+\infty)$; c) $(-\infty,-2) \bigcup [-1,\infty)$;

    d) $(-\infty,-2] \bigcup [-1,\infty)$; e) $(-\infty,-2] \bigcup (-1,\infty)$.

12. Mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2+x+1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ este:

    a) $\mathbb{R}$; b) $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$; c) $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$; d) $\left[-\frac{3}{4},+\infty\right)$; e) $(0,+\infty)$.

13. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot \sin\dfrac{1}{x-2}$ este:

    a) 1; b) 0; c) -1; d)$+\infty$; e) $-\infty$.

14. Suma pătratelor soluțiilor ecuației $4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$ este:

    a) 20; b) 1/4; c) 3/2; d) 5; e) 5/4.

15. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A^2 + A + I_2$ este:

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Testul 2

D.M.I. [2]

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x-5 & \text{dacă } x \in (-\infty,1) \\ (m-2)x-5 & \text{dacă } x \in [1,3] \\ x+7 & \text{dacă } x \in (3,+\infty). \end{cases}$$

Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care f este strict crescătoare este

a) $m \in [5,7]$; b) $m \in [-5,5]$; c) $m \in (-\infty,7]$; d) $m \in (-2,4]$; e) $m \in [5,+\infty)$.

2. Fie sistemul

$$\begin{cases} \left[\dfrac{3x+1}{2}\right] + \left[\dfrac{2y-1}{3}\right] = x, \\ \left[\dfrac{3x-1}{3}\right] + \left[\dfrac{2y+1}{2}\right] = y, \end{cases}$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Dacă

$$A = \left\{ x^2+y^2 \;\middle|\; (x,y) \text{ soluţie a sistemului dat} \right\},$$

[2] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

atunci

a) $A=\{1,2,3\}$; b) $A=\{1,2\}$; c) $A=\{0,3\}$; d) $A=\{0,1\}$; e) $A=\{0,4\}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-(m+1)x+1, m\in\mathbb{R}$. Dacă $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci

a) $m\in(-1,\infty)$; b) $m\in(0,1)$; c) $m\in(0,\infty)$; d) $m=1$; e) $m=-1$.

4. Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=3$ sunt

a) $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$.

5. Soluţia inecuaţiei $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}\geq 1$ este

a) $\left[\frac{14+\sqrt{7}}{2},9\right]$; b) $\left[6,\frac{17}{2}\right]$; c) $\emptyset$; d) $[7,9]$; e) $[5,9]$.

6. Dacă x este soluţia ecuaţiei

$$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1},$$

atunci $4x^2+2x=$

a) 9; b) 12; c) 2; d) 0; e) -12.

7. Soluţia ecuaţiei $\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^4=n(n-2)$ este

a) $n=5$; b) $n=4$; c) $n=6$; d) $n=7$; e) $n=1$.

8. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică ce satisface relaţiile $b_5-b_1=15$ şi $b_4-b_2=6$. Dacă $q>1$ este raţia progresiei geometrice, atunci

a) $q=2,5$; b) $q=3$; c) $q=8$; d) $q=4$; e) $q=2$.

9. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an+\sqrt{2+bn+cn^2}\right)=1$, atunci $a+b+c=$

a) 1; b) 2; c) -1; d) 0; e) -2.

10.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+n+1}=$$

a) ∞; b) 1; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{3}$; e) 0.

11.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{x^2+1}}=$$

a) e^2; b) 0; c) 1; d) e^{-2}; e) e.

12. Se consideră funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\frac{|x|-3}{1+2|x|}.$$

Mulţimea asimptotelor la graficul funcţiei este

a) $\{y=x+1\}$; b) $\{y=x\}$; c) $\{x=-\frac{1}{2}\}$; d) $\{y=\frac{1}{2}\}$; e) $\{y=\frac{1}{2},x=-\frac{1}{2}\}$

13. Dacă F este o primitivă a funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}},\ \text{şi}\ \lim_{x\to\infty}F(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}},$$

atunci $F(x)=$

a) $\frac{x}{1-2x}e^{\operatorname{arctg} x}$; b) $\frac{1}{2}\left(e^{\operatorname{arctg} x}+e^{\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2}}\right)$; c) $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}$; d) $\frac{2x+1}{4\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}$;

e) $\frac{x^2}{1-2x}\left(e^{\operatorname{arctg} x}+e^{\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2}}\right)$.

14. Dacă

$$\int_{\alpha}^{1}\left(3x^2+2x-1\right)dx=3,$$

atunci

a) $\alpha=0$; b) $\alpha=\dfrac{1}{2}$; c) $\alpha=-1$; d) $\alpha=-2$; e) $\alpha=-3$.

15. Aria mulţimii mărginită de graficele funcţiilor

$$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x^3,\ \ g(x)=x^2$$

şi dreptele $x=0$ şi $x=1$ este

a) $\frac{x+1}{4}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $\frac{1}{12}$; d) $\frac{10}{3}$; e) $\frac{32}{3}$.

Testul 3

D.M.I. [3]

1. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $||x|-1|=13$ este

a) 6; b) 0; c) 1; d) -1; e) -2.

2. Soluţiile inecuaţiei $\dfrac{x-x^2}{x^2+x-6}\geq 0$ sunt

a) $x\in(-1,4)$; b) $x\in[-3,-1)\cup(1,2)$; c) $x\in(-3,2)$; d) $x\in(-3,0]\cup[1,2)$;

e) $x\in(-3,0]\cup[2,3)$.

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

3. Soluţiile sistemului de inecuaţii

$$\begin{cases} |x+1|-x>2 \\ x^2+2x-80<0 \end{cases}$$

sunt

a) $x\in(-1,5]$; b) $x\in(-8,10)$; c) $x\in\left(-10,\frac{3}{2}\right)$; d) $x\in(-10,8)$; e) $x\in(-10,-4)$.

4. Valoarea numărului $n=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ este

a) $n=3$; b) $n=4$; c) $n=5$; d) $n=6$; e) $n=2$.

5. Numărul soluţiilor întregi ale ecuaţiei

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$$

este egal cu

a) 1; b) 3; c) 0; d) 4; e) 2.

6. Soluţia inecuaţiei

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+3}}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}<1$$

este

a) $(-1,0]\cup(1,\infty)$; b) $(-1,1)$; c) $(-1,0)\cup(1,\infty)$; d) $[0,\infty)$; e) $(-1,0)\cup(2,\infty)$.

7. Soluţia sistemului $\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2} \\ C_x^2=153 \end{cases}$ este

a) $\begin{cases} x=12 \\ y=8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=18 \\ y=8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=18 \\ y=16 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x=18 \\ y=10 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x=16 \\ y=12 \end{cases}$.

8. Termenii unei progresii geometrice satisfac relaţiile

$$a_1+a_5=51 \text{ şi } a_2+a_6=102.$$

Dacă $S_n=3069$, atunci $n=$

a) 8; b) 11; c) 10; d) 12; e) 9.

9. Limita şirului $(a_n)_{n>0}$ cu termenul general

$$a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}$$

este

a) ∞; b) 1; c) e; d) 0; e) e^{-1}.

10.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}}{n\sqrt{3n}} =$$

a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{6}$; d) ∞; e) $\frac{1}{3}$.

11. Numerele reale a şi b pentru care
$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+ax+b\right) = 2$$
sunt:

a) $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$.

12. Funcţia
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} 2x-\sqrt{a^2x^2+ax+1} & \text{dacă } x\le 1 \\ \sqrt{x-1}+|a|\sqrt{x} & \text{dacă } x>1 \end{cases}$$
este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă

a) $a\in\left\{-1,\frac{3}{5}\right\}$; b) $a\in\left\{-2,\frac{5}{3}\right\}$; c) $a\in\left\{-1,-\frac{3}{5}\right\}$; d) $a\in\left\{-2,\frac{2}{5}\right\}$; e) $a\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$.

13. Primitivele funcţiei
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{a^2+x^2},\quad (a\in\mathbb{R}^\star)$$
sunt

a) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$; b) $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$; c) $\operatorname{arctg}x+\mathcal{C}$; d) $\operatorname{tg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$; e) $\ln\left(ax+\sqrt{a^2+x^2}\right)+\mathcal{C}$.

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n}}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2n}}.$$
Atunci $\int_0^2 f(x)dx =$

a) $2\ln\frac{e}{3}$; b) $2\ln\frac{2}{3}$; c) $2\ln\frac{3}{e}$; d) $2\ln\frac{4}{3}$; e) $\ln\frac{4}{3}$.

15. Volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia
$$f:[0,a]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2,\quad a>0,$$
este egal cu

a) $\frac{\pi a^3}{7}$; b) $\frac{\pi a^3}{14}$; c) $\frac{\pi a^3}{4}$; d) $\frac{\pi a^3}{15}$; e) $\frac{\pi a^3}{5}$.

Testul 4

D.M.I. [4]

1. Se consideră funcţiile

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x-1| + 2, \quad g(x) = |x-2| + 1.$$

Atunci funcţia $f \circ g$ are legea de corespondenţa

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-4 & \text{dacă } x \geq 4 \\ x+4 & \text{dacă } x < 4 \end{cases}$. b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -4 & \text{dacă } x \geq 2 \\ x & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$.

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \geq 2 \\ 4 & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$. d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4 & \text{dacă } x \geq 2 \\ x & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$.

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 2 \\ 4-x & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$.

2. Se consideră ecuaţia $2x^2 - 2(2m-1)x + 2m^2 + 2m + 3 = 0$, unde m este un parametru real. Rădăcinile x_1, x_2 sunt reale şi

$$2 - \sqrt{3} \leq \frac{x_1}{x_2} \leq 2 + \sqrt{3},$$

dacă şi numai dacă

a) $m \in [-4, -1]$,; b) $m \in (-\infty, -4] \cup \left[-1, -\frac{5}{8}\right]$; c) $m \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$;

d) $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{8}\right]$; e) $m \in \left[-\frac{5}{8}, \infty\right)$.

3. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x-3} = x - 3$ este

a) 8; b) 6; c) 7; d) 10; e) 9.

4. Se consideră numerele reale $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$, $y = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$, $A = x+y$ şi $B = x-y$. Atunci

a) $A \in \mathbb{Q}, B \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; b) $A \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, B \in \mathbb{Q}$; c) $A, B \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; d) $x, y \in \mathbb{Q}$; e) $A, B \in \mathbb{Q}$.

5. Ecuaţia $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x^2} = \sqrt[3]{x^2+7} - 2$

a) are soluţie unică. b) nu are soluţii. c) are două soluţii in intervalul $[-2, 0]$. d) are trei soluţii. e) are două soluţii in intervalul $[0, 2]$.

6. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_{\sqrt{3x}} x}} = -1$$

este

[4] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

a) $\left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right\}$; b) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{9}\right\}$; c) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; d) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$; e) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

7. Termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^8$ este

a) $T_5 = C_8^4 x^2 \cdot y^2$; b) $T_7 = C_8^6 x^3 \cdot y^3$; c) $T_4 = C_8^3 x^2 \cdot y\sqrt{xy}$; d) $T_6 = C_8^5 x \cdot y^2\sqrt{xy}$;

e) $T_3 = C_8^2 x^3 \cdot y$.

8. Fie ecuaţia $x^3 + x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Dacă $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$, atunci $m =$

a) 1; b) 0; c) -1; d) 2; e) -2.

9. Limita şirului $(a_n)_{n>0}$ cu termenul general

$$a_n = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{(n+1)!}$$

este

a) 1; b) 0; c) ∞; d) e; e) e^{-1}.

10.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3} =$$

a) 4; b) 0; c) 1; d) $\dfrac{1}{2}$; e) ∞.

11. Dacă

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{5x}$$

atunci

a) $L = \frac{2}{5}$; b) $L = \frac{1}{5}$; c) $L = -\frac{1}{5}$; d) $L = -\frac{2}{5}$; e) $L = 0$.

12. Valoarea parametrului real a, pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (\sin x + e^x)^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ a & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}$, este

a) $a = e^3$; b) $a = 1$; c) $a = e^{-5}$; d) $a = e^2$; e) $a = 0$.

13.

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx =$$

a) $\ln\sqrt{1 + \cos^2 x} + \mathcal{C}$; b) $\ln(1 + \cos^2 x) + \mathcal{C}$; c) $\operatorname{arctg}(\cos x) + \mathcal{C}$; d) $\ln\sqrt{1 - \cos^2 x} + \mathcal{C}$;

e) $-\text{arctg}\,(\cos x)+\mathcal{C}$.

14. Dacă

$$f:[0,2]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\max\{1,x^2\},$$

atunci

$$\int_0^2 e^x f(x)dx=$$

a) $4e+5$; b) $1-3e^2$; c) $2e^2$; d) $2e^2-1$; e) $\frac{e}{2}$.

15. Aria domeniului plan mărginit de graficele funcţiilor

$$f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=1-x,\quad g(x)=\sqrt{1-x^2}$$

este

a) $e-1$; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) $\frac{\pi-2}{4}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Testul 5

Raluca Mihaela Georgescu [5]

1. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} x^2-3 & -2 \\ x+2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

   a) $x\in\{-1,1\}$; b) $x=-1$; c) $x=1$; d) $x\in\{-1,0\}$; e) $x=0$

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}^{\,2}2x}{\sin^2 5x}$.

   a) 2/5; b) 2/25; c) 4/5; d) 4/25; e) 1

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât parabola asociată funcției $f(x)=x^2-(m+3)x+1$ să fie tangentă axei Ox.

   a) $m\in\{-1,-5\}$; b) $m=-1$; c) $m=5$; d) $m\in\{1,-5\}$; e) $m=0$

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-1)^2}{2x^3+3x-1}$.

   a) ∞; b) 0; c) 1/2; d) 1; e) 5/2

5. Să se determine termenul liber al polinomului $f=(x+1)^{10}+(3x-1)^{10}$.

   a) 0; b) 2; c) -1; d) -2; e) 1

6. Să se calculeze $\int\limits_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x}\text{dx}$.

   a) 2/3; b) 1/2; c) 1/3; d) 0; e) 1

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

7. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^4.

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 3i \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -5 & 3i \\ 1 & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -5 & 3i \\ 3i & 2 \end{pmatrix}$

8. Fie F primitiva funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, cu proprietatea că $F(0) = 0$. Să se determine $F(1)$.

   a) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$; b) $\sqrt{3} + \ln(1+\sqrt{3})$; c) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\sqrt{2}\right)$;

   d) $\frac{1}{2}\left(1 + \ln(1+\sqrt{3})\right)$; e) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1-2\sqrt{2})\right)$

9. Valorile lui $k \in \mathbb{R}$ pentru care inecuația $x^2 - (k-1)x - k + 1 < 0$ nu are soluție sunt:

   a) [-1,3]; b) (2,4]; c) [-3,1]; d) (-3,1); e) $\emptyset$

10. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + \hat{3}x + \hat{2} = \hat{0}$ peste corpul $\mathbb{Z}_5$ este

    a) $\{\hat{2}\}$; b) $\{\hat{3}\}$; c) $\{\hat{3}, \hat{4}\}$; d) $\{\hat{4}\}$; e) $\{\hat{2}, \hat{4}\}$

11. Aria subgraficului determinat de graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$, $x = e$ este:

    a) $\frac{e^2-1}{4}$; b) $\frac{e+1}{4}$; c) $\frac{e^2+1}{4}$; d) $\frac{e^2+1}{2}$; e) $\frac{e+1}{2}$

12. Dacă x este soluția ecuației $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^x = \frac{125}{8}$, atunci $3^x + 6^x$ este:

    a) 9; b) 45; c) 243; d) 241; e) 120

13. Restul împărțirii polinomului $f = (x+1)^{10} + (x-1)^{10}$ la $g = x^2 - 3x + 2$ este:

    a) $(3^{10} - 2^{10} + 1)x + 2^{11} - 3^{10} - 1$; b) $(3^{10} + 2^{10} - 1)x + 2^{11} + 3^{10} - 1$;

    c) $(3^{10} - 2^{10})x + 2^{11} - 3^{10}$; d)$(3^{10} + 1)x + 2^{11} - 1$; e) $(3^{10} + 2^{10} + 1)x + 2^{11} + 3^{10} + 1$

14. Suma soluțiilor reale ale ecuației $|||x-1| - 2| - 1| = 2$ este:

    a) 3; b) 2; c) 24; d) 6; e) 4

15. Dacă într-o progresie aritmetică $a_1 = 3$, $a_5 - a_3 = 10$, atunci suma primilor 20 de termeni ai progresiei este:

    a) 1000; b) 1200; c) 1010; d) 1020; e) 1100

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marina Luncan [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care este valoarea expresiei C/C++: $(3 + 17/2) * 2$? **(4p.)**

   a) 23 b) 22 c) 20 d) 21

2. Se consideră algoritmul de mai jos, reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `x%y` restul împărțirii lui `x` la `y`.

```
citeste n,k (numere naturale)
pentru i←2,n executa
|  daca i%k=0 sau k%i=0  atunci
|_ |_ s←s+1
daca s>0 atunci scrie s
|_ altfel scrie "NU"
```

   a) Scrieți pe foaia de examen ce se va afișa dacă se citesc în această ordine numerele **10** și **3**. **(6p.)**
   b) Scrieți o pereche formată din numere de două cifre care să determine afișarea mesajului NU. **(4p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să înlocuiască structura **pentru** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii aritmetice determină pătratul sumei dintre **a** și **b**? **(4p.)**

   a) `pow(a,2)+pow(b,2)` c) `sqrt(a+b)`
   b) `(a+b)*2` d) `pow(a,2)+pow(b,2)+2*a*b`

2. Se consideră citit caracterul **c** (literă mică a alfabetului englez). Care dintre următoarele secvențe de program determină transformarea caracterului **c** în literă mare? **(4p.)**

[1] Profesor, Colegiul Național „Alexandru Odobescu”, Pitești, inalucan@gmail.com

S1: `c=c+32;`
S2: `c=c-32;`
S3: `for(i=1;i<=16;i++)c=c-2;`
S4: `for(i=1;i<=32;i++)c++;`

a) S2 și S3; b) doar S1; c) doar S2; d) S1 și S4.

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

3. O fracție este dată prin două numere întregi **a** și **b**, reprezentând numărătorul, respectiv numitorul acesteia. Scrieți o secvență de instrucțiuni care să verifice dacă fracția se poate simplifica prin numărul **d** și afișați numărătorul și numitorul fracției simplificate sau mesajul NU, dacă aceasta nu se poate simplifica prin **d**. **(6p.)**
4. Un număr se numește "rar" dacă mai mult de jumătate din cifrele sale sunt egale cu **0**.
   a) Scrieți un algoritm pseudocod care citește repetat numere, până la întâlnirea numărului **0** și afișează pe ecran numerele rare din care s-au extras cifrele egale cu **0**. **(10p.)**
   b) Menționați rolul fiecărei variabile și specificați care sunt datele de intrare și care sunt datele de ieșire ale problemei. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră șirul de numere întregi **20, 4, 3, 1, 10, 5**. Se ordonează șirul descrescător, folosind metoda bulelor. După câte parcurgeri de șir se va obține ordonarea. **(4p.)**

   a) 3 b) 4 c) 2 d) 6

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Înlocuiți punctele de suspensie, în secvența următoare astfel încât să se afișeze secvența de numere din dreapta. **(6p.)**

```
for (i=1;i<=4;i++)
        for(j=3;j>=1;j--)
          ......................
```

```
1 1 1
2 2 2
3 3 3
4 4 4
```

3. Se citește de la tastatură un șir cu **n** elemente, numere reale (**n<100**). Scrieți un program C/C++ care determină modificarea șirului inițial astfel ca numerele divizibile cu **10** să se afle la începutul șirului, ordinea celorlalte elemente nefiind semnificativă. Elementele șirului vor fi afișate pe ecran, pe o singura linie, despărțite prin câte un spațiu. Dacă în șir nu există numere divizibile cu **10**, se va afișa pe ecran mesajul NU EXISTA. **(10p.)**

   Exemplu: Dacă, pentru **n = 6** se citesc numerele **2 10 3 20 5 6**, se va afișa **10 20 2 3 5 6**.
4. Fișierul **bac.in** conține pe prima linie trei numere întregi **n**, **a**, **b**, iar pe următoarea linie **n** numere reale. Afișați pe ecran cel mai mare număr real care se afla in intervalul **[a, b]** și numărul sau de apariții, despărțite prin câte un spațiu. Dacă fișierul **bac.in** nu conține numere din intervalul **[a, b]** se va afișa mesajul NU EXISTA.
   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(4p.)**
   b) Scrieți un program C/C++ pentru rezolvarea problemei. **(6p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.in** se află numerele

10 2 12

1 13 5 13 9 8 1 9 9 15

pe ecran se va afișa **9 3**.

Testul 2

Sofia-Elena Ciobanu [2]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Expresia C/C++: 6/8*3%2 are valoarea: **(4p.)**

   a) 3 b) 0 c) 1 d) 2

2. Se consideră algoritmul următor, reprezentat în pseudocod:

```
intreg n, s, uc
citeste n (numar natural cu cel putin 2 cifre)
cat timp n>0 executa
|   s←0
|   cat timp n>0 executa
|    |   uc←n%10
|    |   s←s+uc
|    |_  n←n/10
|    daca s > 9 atunci
|_   |_ n←s
scrie s
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citește numărul 12349. **(6p.)**
   b) Scrieți trei numere distincte astfel încât, în urma executării algoritmului, pentru fiecare dintre acestea să se afișeze valoarea 7. **(4p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind structura **cât timp** ... **execută** cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**
   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care este numărul total de atribuiri efectuate la executarea următoarei secvențe de instrucțiuni? **(4p.)**

```
t=1; z=19;
while(z==19) z = z*z;
if (t==z) t = t*3;
```

[2] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești, stefanescu_sofia@yahoo.com

a) 3 b) 4 c) 1 d) 2

2. Variabilele întregi **x** și **y** memorează numere naturale Ce expresie de mai jos este echivalentă cu expresia **(x+y)%3==1** ? **(4p.)**

   a) (x%3==0) && (y%3==0) && (x%3==1) && (y%3==1)
   b) (x%3==0) && (y%3==1) || (x%3==1) && (y%3==0)
   c) (x%3==1) || (y%3==0) && (x%3==0) || (y%3==0)
   d) (x%3==0) && (y%3==0) && (x%3==0) || (y%3==1)

Scrieți răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

3. Pentru o dulceață sunt memorate prețul, precum și date despre numele fructului și cantitatea de zahăr folosită pentru un borcan.

   Variabilele întregi **pret1, fruct1** și **zahar1** memorează prețul, tipul de fruct folosit și cantitatea de zahăr specifică unui anumit tip de dulceață, iar variabilele **pret2, fruct2** și **zahar2** memorează prețul, tipul de fruct folosit și cantitatea de zahăr specifică unui alt tip de dulceață.

   Să se scrie o secvență de instrucțiuni C/C++ care, în urma executării, să afișeze prețul dulceței cu o cantitate mai mică de zahăr, iar dacă ambele borcane de dulceață au aceeași cantitate de zahăr să se afișeze mesajul ,,ZAHAR IN MOD EGAL". **(6p.)**

4. Se citesc **n** numere naturale. Calculați produsul tuturor numerelor care încep cu cifra **7**.

   a) Scrieți în pseudocod algoritmul de rezolvare. **(10p.)**
   b) Precizați rolul tuturor variabilelor care au intervenit în algoritmul realizat și indicați datele de intrare și datele de ieșire ale problemei enunțate. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabilele **a** și **b** sunt de tip întreg și memorează numere naturale nenule. Indicați instrucțiunea care poate înlocui punctele de suspensie, astfel încât în urma executării secvenței obținute să se interschimbe valorile celor două variabile.

```
..........
b=a-b;
a=a-b;
```

   a) a=a+b b) a=a-b c) b=b+a d) a=b-a **(4p.)**

Scrieți răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Variabilele **i** și **j** sunt de tip întreg. Scrieți expresia care poate înlocui punctele de suspensie, astfel încât, în urma executării secvenței, să se afișeze suma elementelor pare ce se află pe primul pătrat concentric al unei matrice cu 8 linii și 8 coloane, numerotate de la 1 la 8. **(6p.)**

```
for(i=1; i<=8; i++)
  for(j=1; j<=8; j++)
    if(.................)
        if(a[i][j]%2==0)
            s=s+a[i][j];
cout<<s;
```

3. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural **n** și cele **n** elemente ale unui tablou unidimensional, numere întregi. Ordonați descrescător elementele aflate pe pozițiile impare ale tabloului unidimensional. **(10p.)**
4. Fișierul **Numere.txt** conține pe o singură linie, separate prin câte un spațiu cel mult 50 de numere întregi. Scrieți un program care citește numerele din fișierul **Numere.txt** și afișează pe ecran, separate prin câte un spațiu în ordine crescătoare, toate numerele din fișier care au proprietatea de a fi palindrom. Dacă fișierul nu conține astfel de numere se va afișa mesajul NU EXISTA.
   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul utilizat. **(4p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător. **(6p.)**

Testul 3

Maria Miroiu [3]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care este expresia echivalentă cu expresia C/C++: **!(x>=0 && x<=9)**? **(4p.)**
   a) x<0 && x>9;
   b) x>=0 ||x<=9;
   c) x<0 ||x>9;
   d) !(x>=0) && (x>9.
2. Se consideră algoritmul de mai jos, descris în pseudocod. S-a notat cu x%y restul împărțirii lui x la y.

```
citeste n (numar natural nenul)
s←0
cat timp n>0 executa
|   c←n%10
|   daca c%2=1 atunci
|   |     pentru i←1,c executa
|   | _   |_    s←s+i
|_  n←n/10
scrie s
```

   a) Scrieți ce se va afișa dacă pentru variabila **n** se citește valoarea **(6p.)**
   b) Scrieți un număr întreg strict pozitiv ce poate fi citit ca valoare a variabilei **n** astfel încât algoritmul să afișeze valoarea **0**. **(4p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura **pentru ... executa** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Presupunând că lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sunt memorate în variabilele **c1** și **c2**, care este expresia C/C++ cu care se poate determina lungimea ipotenuzei?

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@yahoo.com

a) pow(c1,2)+pow(c2,2)
b) sqrt(pow(c1,2)+pow(c2,2))
c) sqrt(c1+c2)
d) pow(c1,2)+pow(c2,2)+2*c1*c2

2. Se consideră secvența de cod C/C++ de mai jos, în care **n** memorează valoarea unui număr natural nenul dat, iar toate celelalte variabile sunt de tip întreg. **(4p.)**

```
ucp = 1;
for (d=1; d<=n; d++)
        if (n%d==0)
        ......
```

Expresia care poate înlocui punctele de suspensie astfel încât la sfârșitul secvenței C/C++ obținute variabila **ucp** să memoreze ultima cifră a produsului tuturor divizorilor variabilei **n** este: **(4p.)**

a) ucp=(ucp+d)%10;
b) ucp=n/d%10*upc;
c) ucp=d%10*ucp;
d) ucp=(ucp*d)%10;

Scrieți răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

3. Se consideră două date de naștere definite prin variabile întregi **zi1**, **luna1**, **an1**, respectiv **zi2**, **luna2**, **an2**. Scrieți o expresie C/C++ care să aibă valoarea **1** dacă cele două persoane sunt născute în aceeași zi și aceeași lună, dar ani diferiți. **(6p.)**
4. Pentru un număr natural, cifra de ordin 1 este cifra unităților, cifra de ordin 2 este cifra zecilor, cifra de ordin 3 este cifra sutelor, ș.a.m.d. Rotunjirea unui număr la cifra de ordin k se realizează în funcție de valoarea cifrei imediat din dreapta. De exemplu, pentru n=27432 rotunjirea la cifra de ordin k=2 (cifra zecilor) conduce la numărul 27430 pentru că cifra unităților este mai mică decât 5, iar pentru n=27472 rotunjire la cifra de ordin k=3 (cifra sutelor) conduce la 27500 pentru că cifra zecilor este mai mare sau egală decât 5.

a) Scrieți un algoritm în pseudocod care citește două numere naturale **n** și **k** (**n≥1, k≥1**) și determină numărul natural obținut prin rotunjirea lui **n** la ordinul **k** dacă variabila **k** are valoarea mai mică decât numărul de cifre ale lui **n**, iar în caz contrar afișează mesajul ,,Eroare". **(10p.)**
b) Menționați rolul fiecărei variabile și specificați care sunt datele de intrare și care sunt datele de ieșire ale problemei. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare:

1. Indicați expresia care poate înlocui punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze matricea de mai jos. **(4p.)**

```
for(i=1;i<=4;i++)
{ for(j=1;j<=4;j++)
       cout<<.....; | printf("%d",.....);
 cout<<endl; | printf("%n"); }
```

0 0 0 0
0 1 2 3
0 1 3 4
0 2 4 6

a) **i*j/2**
b) **i*(j-1)/2**
c) **(i-1)*j/2**
d) **(i-1)*(j-1)/2**

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare

2. În secvența de mai jos, toate variabilele sunt de tip întreg. Înlocuiți punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, valoarea variabilei **ok** să fie **1** dacă există cel puțin un număr par între cele 10 numere citite, sau valoarea **0** în caz contrar. **(6p.)**

```
ok = ......;
for (i=1;i<=10;i++)
{ cin>>k; | scanf("%d",&k);
  ......; }
```

3. Se citesc de la tastatură valorile a două variabile întregi, **n** (**2<n<100**) și **k** (**1<k<n**), apoi un șir de **n** elemente, numere întregi. Scrieți un program C/C++ care determină modificarea șirului inițial, astfel încât primele **k** elemente să fie ordonate descrescător, iar ultimele **n-k** elemente să fie ordonate crescător. Elementele șirului modificat vor fi afișate pe ecran, pe o singură linie, despărțite prin câte un spațiu. **(10p.)**

Exemplu: Pentru **n = 8, k=3** și elementele **4 7 3 8 9 16 10 6**, se va afișa **7 4 3 6 8 9 10 16**.

4. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei **n**, iar pe următoarea linie un șir de **n** numere naturale, despărțite prin spații. Afișați pe ecran valoarea pară cea mai mare și numărul/numerele de ordine din șir al/ale valorii pare maximă, despărțite printr-un spațiu. Dacă fișierul **bac.txt** nu conține numere pare, se va afișa pe ecran mesajul **Nu exista**.

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(4p.)**
   b) Scrieți un program C/C++ pentru rezolvarea problemei. **(6p.)**

Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

```
9
3  16  2  7  15  4  16  6  8
```

pe ecran se va afișa 16 2 7.

Testul 4

Maria Miroiu [4]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care este expresia echivalentă cu expresia Pascal: **not((x>=0) and (x<=9))**? **(4p.)**

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@yahoo.com

a) (x<0) and (x>9)
b) (x>=0) or (x<=9)
c) (x<0) or (x>9)
d) not(x>=0) and (x>9)

2. Se consideră algoritmul următor, descris în pseudocod. S-a notat cu x%y restul împărțirii lui x la y.

a) Scrieți ce se va afișa dacă pentru variabila **n** se citește valoarea **1234**. **(6p.)**
b) Scrieți un număr întreg strict pozitiv ce poate fi citit ca valoare a variabilei **n** astfel încât algoritmul să afișeze valoarea **0**. **(4p.)**
c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura **pentru ... executa** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
d) Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

```
citeste n (numar natural nenul)
s←0
cat timp n>0 executa
|   c←n%10
|   daca c%2=1 atunci
|   |    pentru i←1,c executa
|   | _  |_   s←s+i
|_  n←n/10
scrie s
```

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Presupunând că lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sunt memorate în variabilele **c1** și **c2**, care este expresia Pascal cu care se poate determina lungimea ipotenuzei? **(4p.)**

a) sqr(c1)+sqr(c2)
b) sqrt(sqr(c1)+sqr(c2))
c) sqrt(c1+c2)
d) sqr(c1)+sqr(c2)+2*c1*c2

2. Se consideră secvența de cod Pascal de mai jos, în care **n** memorează valoarea unui număr natural nenul dat, iar toate celelalte variabile sunt de tip întreg.

```
ucp:=1;
for d:=1 to n do
    if n mod d=0 then
        ......
```

Expresia care poate înlocui punctele de suspensie astfel încât la sfârșitul secvenței Pascal obținute variabila **ucp** să memoreze ultima cifră a produsului tuturor divizorilor variabilei **n** este: **(4p.)**

a) ucp:=(ucp+d) mod 10;
b) ucp:=n/d mod 10*upc;
c) ucp:=d mod 10*ucp;
d) ucp:=(ucp*d) mod 10.

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare:

3. Se consideră două date de naștere definite prin variabile întregi **zi1**, **luna1**, **an1**, respectiv **zi2**, **luna2**, **an2**. Scrieți o expresie Pascal care să aibă valoarea **1** dacă cele două persoane sunt născute în aceeași zi și aceeași lună, dar ani diferiți. **(6p.)**

4. Pentru un număr natural, cifra de ordin 1 este cifra unităților, cifra de ordin 2 este cifra zecilor, cifra de ordin 3 este cifra sutelor, ș.a.m.d. Rotunjirea unui număr la cifra de ordin k se realizează în funcție de valoarea cifrei imediat din dreapta. De exemplu, pentru n=27432 rotunjirea la cifra de ordin k=2 (cifra zecilor) conduce la numărul 27430 pentru că cifra unităților este mai mică decât 5, iar pentru n=27472 rotunjire la cifra de ordin k=3 (cifra sutelor) conduce la 27500 pentru că cifra zecilor este mai mare sau egală decât 5.

   a) Scrieți un algoritm în pseudocod care citește două numere naturale **n** și **k** (**n≥1, k≥1**) și determină numărul natural obținut prin rotunjirea lui **n** la ordinul **k** dacă variabila **k** are valoarea mai mică decât numărul de cifre ale lui **n**, iar în caz contrar afișează mesajul ,,Eroare". **(10p.)**
   b) Menționați rolul fiecărei variabile și specificați care sunt datele de intrare și care sunt datele de ieșire ale problemei. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Indicați expresia care poate înlocui punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze matricea de mai jos. **(4p.)**

```
for i:=1 to 4 do
begin   for j:=1 to 4 do
            write(......);
        writeln;
end;
```

0 0 0 0
0 1 2 3
0 1 3 4
0 2 4 6

   a) i*j div 2
   b) i*(j-1) div 2
   c) (i-1)*j div 2
   d) (i-1)*(j-1) div 2

2. În secvența de mai jos, toate variabilele sunt de tip întreg. Înlocuiți punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, valoarea variabilei **ok** să fie **true** dacă există cel puțin un număr par între cele 10 numere citite, sau valoarea **false** în caz contrar. **(6p.)**

```
ok := ......;
for i:=1 to 10 do
begin
   read(k);
  ......;
end;
```

3. Se citesc de la tastatură valorile a două variabile întregi, **n** (**2<n<100**) și **k** (**1<k<n**), apoi un șir de **n** elemente, numere întregi. Scrieți un program Pascal care determină modificarea șirului inițial, astfel încât primele **k** elemente să fie ordonate descrescător, iar ultimele **n-k** elemente să fie ordonate crescător. Elementele șirului modificat vor fi afișate pe ecran, pe o singură linie, despărțite prin câte un spațiu. **(10p.)**

   Exemplu: Pentru **n = 8, k=3** și elementele **4 7 3 8 9 16 10 6**, se va afișa **7 4 3 6 8 9 10 16**.

4. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei **n**, iar pe următoarea linie un șir de **n** numere naturale, despărțite prin spații. Afișați pe ecran valoarea pară cea mai mare și numărul/numerele de ordine din șir al/ale valorii pare

maximă, despărțite printr-un spațiu. Dacă fișierul **bac.txt** nu conține numere pare, se va afișa pe ecran mesajul **Nu exista**.

a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(4p.)**
b) Scrieți un program Pascal pentru rezolvarea problemei. **(6p.)**

Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

```
9
3  16  2  7  15  4  16  6  8
```

pe ecran se va afișa 16 2 7.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Cristina Constantinescu [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Indicați expresia care are valoarea `1` dacă și numai dacă valorile variabilelor `x` se află în afara intervalului `(-3,3)`. **(4p.)**

   a) `x*x - 9 <= 0`
   b) `(x > -3 || x < 3)`
   c) `x*x - 9 >= 0`
   d) `!(x < -3 && x > 3)`

2. Se consideră algoritmul următor, reprezentat în pseudocod. S-a notat cu **x%y** restul împărțirii lui **x** la **y**.

```
citeste c (numar natural cuprins intre 1 si 9)
citeste n (numar natural nenul)
x ← 1
y ← 0
pentru i = 1, c executa
|     x ← x * 10
|_    y ← y * 10 + 9
x ← x / 10
cat timp (x<=y  si  x<n) executa
|     z ← x
|     i ← z % 10
|     z ← z / 10
|     cat timp (z ≠ 0 si z%10 = i) executa
|     |_   z ← z / 10
|     daca z = 0 atunci
|     |_   scrie x
|_    x ← x + 1
```

a) Scrieți numărul afișat dacă pentru variabila **c** se citește valoarea **4**, iar pentru **n** se citește valoarea **8784**. **(6p.)**
b) Scrieți un număr ce poate fi citit pentru **c** astfel încât dacă pentru **n** se citește valoarea **300**, algoritmul să nu afișeze nimic. **(4p.)**
c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, în care să se înlocuiască secvența ce conține cele două structuri repetitive cu test inițial cu o secvență ce conține o singură structură repetitivă. **(6p.)**
d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", cristina.constantinescu70@gmail.com

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră graful neorientat dat prin matricea de adiacență alăturată.

   Stabiliți dacă se poate obține un arbore prin eliminarea unora dintre muchiile grafului. **(4p.)**

0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

   a) Da, prin eliminarea exact a unei muchii. c) Da, prin eliminarea exact a trei muchii.
   b) Da, prin eliminarea exact a două muchii. d) Nu.

2. Într-un graf neorientat cu **10** muchii, fiecare nod are gradul **2**. Care este numărul maxim de componente conexe din care poate fi format graful? **(4p.)**

   a) 1 b) 3 c) 4 d) 5

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

3. Variabilele **e1** și **e2**, declarate alăturat, memorează numele și data apariției pentru câte o carte. Ştiind că cele două cărți au apărut în ani diferiți, scrieți secvența de instrucțiuni care afișează pe ecran denumirea cărții apărută mai recent. **(6p.)**

```
struct data_a { int an, luna, zi; } ;
struct carte { char nume[20]; data_a d; } e1, e2;
```

4. Variabila **n** este de tip întreg (**n** par, **1≤n≤25**), iar variabila **a** este un tablou bidimensional cu **n** linii și **n** coloane, numerotate de la **1** la **n**, tablou care memorează elementele pozitive cu maxim 4 cifre. Scrieți o secvență de program C/C++ care să afișeze pe ecran suma elementelor aflate strict deasupra celor două diagonale, diagonala principală și diagonala secundară a matricei **a.** Se vor declara convenabil celelalte variabilele folosite în secvență.

   Exemplu: pentru **n** = 4 și **a** = $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix}$ se va calcula 2+3=5 și se va afișa 5.

   (6p.)

5. Se consideră un text cu cel mult **100** de caractere (litere mici ale alfabetului englez, cifre, spații) în care cuvintele sunt separate prin unul sau mai multe spații. Un cuvânt este format numai din litere sau numai din caractere cifre. Înaintea primului cuvânt și după ultimul cuvânt nu există spații.

   Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un cuvânt și apoi determină și afișează pe ecran numărul cuvintelor formate doar din caractere cifre, precum și textul obținut din textul inițial prin înlocuirea cuvântului **10** cu **zece** și ștergerea celorlalte cuvinte formate doar din caractere cifre.

   Exemplu: pentru textul

   Ana are de rezolvat 10 probleme la informatica 100 la matematica 23 la chimie 10 la fizica

se va afișa
4
Ana are de rezolvat zece probleme la informatica la matematica la chimie zece la fizica **(10p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră un număr natural nenul **n** având exact **k** cifre, cifrele lui fiind distincte două câte două, iar printre cele **k** cifre se găsește și cifra **0**. Permutând cifrele lui **n** se obțin alte numere naturale. Câte dintre numerele obținute, inclusiv **n**, au exact **k** cifre? **(4p.)**

   a) k!-(k-1)! b) k! c) (k-1)! d) (k+1)!

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Se consideră subprogramul **f** definit alăturat, în care **a** este număr întreg nenul. Ce se afișează pe ecran la apelul lui **f(3)**, dar la apelul lui **f(123)**? **(6p.)**

```
void f(int a)
{
if (a>0){
     cout<<a%10;
     f(a/10);
     cout<<a%10;
     }
}
```

3. Se consideră subprogramul **divizori**, cu trei parametri. Primeste prin intermediul parametrului **n** un număr natural nenul **2≤n≤10000** și returnează prin intermediul parametrilor **d1** și **d2** cel mai mic, respectiv cel mai mare divizor prim al său **(1<d1≤d2≤n)**.

   Pentru **n=6**, se obțin **d1=2** și **d2=3**, iar pentru **n=7** se obțin **d1=7** și **d2=7**.

   a) Scrieți definiția completă a subprogramului **divizori**. **(6p.)**
   b) Scrieți un program care citește două numere naturale **a** și **b**, de cel mult 4 cifre fiecare, și determină folosind apeluri utile ale subprogramului **divizori** toate numerele naturale cuprinse în intervalul **[a,b]** cu proprietatea că sunt numere prime. Numerele determinate se afișează pe ecran cu spații între ele.

   Exemplu: Pentru **a=12**, **b=20** se vor afișa numerele: **13 17 19** **(4p.)**

4. Fișierul text **numere.in** memorează cel mult **1000000000** de numere naturale și cel puțin **2**, fiecare cu cel mult nouă cifre. Numerele sunt separate prin câte un spațiu.

   Se consideră că un șir format din cel puțin trei termeni formează un ,,*platou*" dacă diferența dintre oricare termen al acestuia, începând cu cel de-al doilea, și cel aflat pe poziția anterioară în șir este constantă și mai mare ca zero.

   Se cere să se citească numerele din fișierul **numere.in** și să se afișeze pe ecran numărul maxim de termeni ai unei secvențe din șir, secvență care formează un ,,*platou*". Dacă nu există astfel de secvență se afișează pe ecran mesajul **Nu exista**.

   Se utilizează un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei și al timpului de executare.

   Exemplu: dacă fișierul **numere.in** conține numerele

3 8 13 18 7 8 1 0 -4 -8 9 13 17 21 25 -6 -1 3 7 17 18

se afișează pe ecran valoarea **5 (**corespunzătoare secvenței **9 13 17 21 25,** care reprezintă o secvență mai lungă decât "platourile" cu elementele: **3 8 13 18** și **-1 3 7** și lungimile **4**, respectiv **3)**.

a) Descrieți în limbaj natural algoritmul utilizat, justificând eficiența acestuia. **(4p.)**
b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului descris. **(6p.)**

Testul 2

Nicoleta Voica [2], *Adrian Voica* [3]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabilele *a, b, c, d* și *x* sunt de tip real. Care dintre următoarele expresii C/C++ au valoarea **1** dacă și numai dacă $x \notin [a,b] \cup [c,d] \cup \{-1,0,1\}$? **(4p.)**

a) x>=a && x<=b ||x>=c && x<=d ||x==-1 ||x==0 ||x==1
b) !(x>=a && x<=b) && !(x>=c && x<=d) && !(x==-1 ||x==0 ||x==1)
c) x<a && x>b ||x<=c && x<=d ||(x!=-1 && x!=0 && x!=1)
d) (x<a ||x>b ||x<c ||x>d) && (x!=-1 && x!=0 && x!=1)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Se consideră algoritmul de mai jos, scris în pseudocod.

```
citeste x (numar intreg)
m←0
cat timp x>0 executa
|  d←2
|  k←0
|  y←x
|  cat timp y≠1 executa
|  |  p←0
|  |  cat timp y%d=0 executa
|  |  |        y←[y/d]
|  |  |_       p←1
|  |_ k←k+p; d←d+1
|  daca k≥m atunci m←k
|  |_              nr←x
|_ citeste x (numar intreg)
scrie m, nr
```

S-a notat cu `[x]` partea întreagă a numărului real `x` iar cu `x%y` restul împărțirii numărului întreg `x` la numărul întreg nenul `y`.

[2] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești, nvoica71@yahoo.fr
[3] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Barbu", Pitești, avoica71@yahoo.com

a) Scrieți ce valori vor fi afișate dacă se citesc pe rând valorile: **15, 13, 305, 12600, 72, 1155, 32, 56, 0**. **(6p.)**
b) Precizați două seturi de date de intrare distincte astfel încât să se afișeze pentru `m`, de fiecare dată, valoarea **1**. **(6p.)**
c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să utilizeze doar două structuri repetitive. **(4p.)**
d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie declarările de mai jos

```
struct bac1
    {
       float a, b;
    };
```

```
struct bac2
{
 int x, y;
 struct bac1 z;
 float t;
};
```

şi următoarele declaraţii:

```
bac1 y,b;
bac2 x,a;
```

Care dintre următoarele construcţii este corectă? **(4p.)**

a) x.b.z b) b.a.z c) a.z.a d) a.y.b

2. Se consideră o structură statică de tip coadă și o structură statică de tip stivă. Notăm cu ADS(x) operația prin care se adaugă informația x în stivă, ADC(x) operația prin care se adaugă informația x în coadă, ELS operația prin care se elimină un element din stivă și se adaugă în coadă, ELC operația prin care se elimină un element din coadă și de adaugă în stivă. Care este conținutul stivei și conținutul cozii în urma executării următoarelor operații?

ADS(5), ADS(8), ADC(3), ELS, ADC(7), ADS(1), ELC, ELC, ADS(2), ELS, ADC(6) **(4p.)**

a) $S:5,1,7,8$ $C:3,2,6$ b) $S:5,1,3,8$ $C:6,2,7$ c) $S:5,1,3,8;$ $C:7,2,6$ d) $S:5,1,7,8$ $C:6,2,3$

3. Se consideră graful neorientat cu **10** noduri, reprezentat prin următoarea listă de muchii: **[1, 4], [1, 5], [1, 7], [2, 6], [3, 4], [3, 10], [5, 6], [7, 8], [7, 9]**.

Să se verifice dacă graful este arbore. În caz afirmativ să se precizeze lungimea celui mai lung lanț elementar din arbore, iar în caz contrar să se precizeze câte muchii trebuie eliminate sau adăugate în graf astfel încât să devină arbore. **(6p.)**

4. Ştiind că **x** este un tablou bidimensional cu **4** linii și **4** coloane (numerotate de la 1 la 4) și elemente de tip întreg să se precizeze care va fi conținutul tabloului după executarea secvenței de instrucțiuni de mai jos? **(6p.)**

```
a=1; b=0;
for (i=4; i>=1; i--)
     for (j=4; j>=i; j--)
           {x[i][j] = a+b;
            c = x[i][j];
```

```
x[j][i] = c;
a = b; b = c;}
```

5. Scrieți un program în C/C++ care citește un text de maxim 250 de caractere litere ale alfabetului englez sau spații și determină și afișează pe ecran numărul total de cuvinte din text, iar pe următorul rând, separate prin câte un spațiu, cuvintele din text în care primul și ultimul caracter sunt ambele vocale sau ambele consoane. **(10p.)**

   Exemplu: pentru textul ***La bacalaureat la proba de Informatica a fost un subiect cu un sir de caractere***
   se va afișa:
   15
   bacalaureat Informatica a fost subiect sir

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Utilizând metoda backtracking, sunt generate în ordine lexicografică toate anagramele cuvântului ***ecran.*** Să se precizeze care sunt cuvintele generate imediat înainte și după secvența următoare: ***ernac, ernca, nacer***. **(4p.)**

   a) ***ercan, nacre*** b) ***ercna, narce*** c) ***ercna, nacre*** d) ***ercan, narce***

2. Fie următorul subprogram recursiv:

```
void bac (int x, int d)
{   if(d<=x/d)
    {
        if(x%d==0) cout<<d<<" ";
        bac(x, d+1);
        if(x%d==0) cout<<x/d<<" ";
    }
}
```

   Ce va afișa subprogramul în urma apelurilor **bac**(13, 1) și **bac**(56, 1)? **(6p.)**

3. a) Scrieți definiția completă a subprogramului **bac** cu doi parametri, care primește prin intermediul primului parametru **x** un număr natural nenul de minim 2 cifre și maxim 9 cifre nenule și returnează prin intermediul celui de-al doilea parametru, **y**, numărul obținut din **x** prin eliminarea primei și a ultimei cifre. Subprogramul returnează valoarea **1** dacă numărul **x** începe și se termină cu aceeași cifră. **(6p.)**

      Exemplu: dacă **x=12341**, subprogramul returnează valoarea **1** deoarece numărul **x** începe și se termină cu aceeași cifră, iar **y=234**.

   b) Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură **n** numere naturale nenule ($1 \leq n \leq 100$) de minim **2** cifre și maxim **9** cifre nenule și folosind apeluri utile ale subprogramului de la punctul a) determină și afișează pe ecran câte dintre cele **n** numere sunt palindrom. În cazul în care nu există în șir numere palindrom se va afișa un mesaj corespunzător. **(4p.)**

      Exemplu: pentru **n=5** și numerele **12341, 454, 11, 89, 4567**, se va afișa **2** (numerele **454** și **11**).

4. Fișierul text **bac.in** conține cel mult 100000 de numere naturale.

   a) Folosind un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei utilizate și al timpului

de executare scrieți un program C/C++ care citește numerele din fișier și determină primul și ultimul număr din șir, precum și pozițiile acestora, care au cele mai multe cifre egale cu **1** în scrierea lor în baza **2**.

Rezultatul se va afișa în fișierul text ***bac.out***. **(6p.)**

b) Descrieți în limbaj natural metoda utilizată justificând eficiența acesteia. **(4p.)**

Exemplu: dacă fișierul `bac.in` conține numerele **4, 5, 9, 13, 6, 11, 10, 14, 2, 1**, se va afișa în `bac.out` **13, 14**, pozițiile **4**, respectiv **8**.

Testul 3

Nicoleta Voica [4], *Adrian Voica* [5]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabilele *a, b, c, d* și *x* sunt de tip real. Care dintre următoarele expresii Pascal au valoarea 1 dacă și numai dacă $x \notin [a, b] \cup [c, d] \cup \{-1, 0, 1\}$? **(4p.)**
   a) x>=a and x<=b or x>=c and x<=d or x==-1 or x==0 or x==1
   b) not(x>=a and x<=b) and not(x>=c and x<=d) and not(x==-1 or x==0 or x==1)
   c) x<a and x>b or x<=c and x<=d or (x<>-1 and x<>0 and x<>1)
   d) (x<a or x>b or x<c or x>d) and (x<>-1 and x<>0 and x<>1)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Se consideră algoritmul de mai jos, reprezentat în pseudocod.

```
citeste x (numar intreg)
m←0
cat timp x>0 executa
|  d←2
|  k←0
|  y←x
|  cat timp y≠1 executa
|  |   p←0
|  |   cat timp y%d=0 executa
|  |   |       y←[y/d]
|  |   |_      p←1
|  |_  k←k+p; d←d+1
|  daca k≥m atunci
|  |_  m←k; nr←x
|_ citeste x (numar intreg)
scrie m, nr
```

[4] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești, nvoica71@yahoo.fr
[5] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Barbu”, Pitești, avoica71@yahoo.com

S-a notat cu [**x**] partea întreagă a numărului real **x** iar cu **x**%**y** restul împărțirii numărului întreg **x** la numărul întreg nenul **y**.

a) Scrieți ce valori vor fi afișate dacă se citesc pe rând valorile: **15, 13, 305, 12600, 72, 1155, 32, 56, 0**. **(6p.)**
b) Precizați două seturi de date de intrare distincte astfel încât să se afișeze pentru **m**, de fiecare dată, valoarea **1**. **(6p.)**
c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să utilizeze doar două structuri repetitive. **(4p.)**
d) Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie declarările de mai jos

```
type bac1 = record
   a,b : real;
end;
```

```
type bac2 = record
   x,y: integer;
   z: bac1;
   t: real;
 end;
```

şi următoarele declaraţii:

```
var y, b: bac1;
    x, a: bac2;
```

Care dintre următoarele construcţii este corectă? **(4p.)**

a) x.b.z b) b.a.z c) a.z.a d) a.y.b

2. Se consideră o structură statică de tip coadă și o structură statică de tip stivă. Notăm cu ADS(x) operația prin care se adaugă informația x în stivă, ADC(x) operația prin care se adaugă informația x în coadă, ELS operația prin care se elimină un element din stivă și se adaugă în coadă, ELC operația prin care se elimină un element din coadă și de adaugă în stivă. Care este conținutul stivei și conținutul cozii în urma executării următoarelor operații?

ADS(5), ADS(8), ADC(3), ELS, ADC(7), ADS(1), ELC, ELC, ADS(2), ELS, ADC(6) **(4p.)**

a) $S:5,1,7,8$ $C:3,2,6$ b) $S:5,1,3,8$ $C:6,2,7$ c) $S:5,1,3,8;$ $C:7,2,6$ d) $S:5,1,7,8$ $C:6,2,3$

3. Se consideră graful neorientat cu **10** noduri, reprezentat prin următoarea listă de muchii: **[1, 4], [1, 5], [1, 7], [2, 6], [3, 4], [3, 10], [5, 6], [7, 8], [7, 9]**.

Să se verifice dacă graful este arbore. În caz afirmativ să se precizeze lungimea celui mai lung lanț elementar din arbore, iar în caz contrar să se precizeze câte muchii trebuie eliminate sau adăugate în graf astfel încât să devină arbore. **(6p.)**

4. Ştiind că **x** este un tablou bidimensional cu **4** linii și **4** coloane (numerotate de la 1 la 4) și elemente de tip întreg să se precizeze care va fi conținutul tabloului după executarea secvenței de instrucțiuni de mai jos? **(6p.)**

```
a=1; b=0;
for i:=4 downto 1 do
```

```
for j:=4 downto i do
  begin
       x[i][j]:=a+b;
       c:=x[i][j];
       x[j][i]:=c;
       a:=b; b:=c;
  end;
```

5. Scrieți un program în Pascal care citește un text de maxim **250** de caractere litere ale alfabetului englez sau spații și determină și afișează pe ecran numărul total de cuvinte din text, iar pe următorul rând, separate prin câte un spațiu, cuvintele din text în care primul și ultimul caracter sunt ambele vocale sau ambele consoane. **(10p.)**

   Exemplu: pentru textul ***La bacalaureat la proba de Informatica a fost un subiect cu un sir de caractere*** se va afișa: ***15***.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Utilizând metoda backtracking, sunt generate în ordine lexicografică toate anagramele cuvântului ***ecran.*** Să se precizeze care sunt cuvintele generate imediat înainte și după secvența următoare: ***ernac, ernca, nacer***. **(4p.)**

   a) ***ercan, nacre*** b) ***ercna, narce*** c) ***ercna, nacre*** d) ***ercan, narce***

2. Fie următorul subprogram:

```
procedure bac (x,d:integer)
begin
  if d<=x/d then
     begin
        if x div d=0 then write(d,' ');
        bac(x,d+1);
        if x div d=0 then write(x div d,' ');
     end;
end;
```

   Ce va afișa subprogramul în urma apelurilor ***bac***(13, 1) și ***bac***(56, 1)? **(6p.)**

3. a) Scrieți definiția completă a subprogramului ***bac*** cu doi parametri, care primește prin intermediul primului parametru **x** un număr natural nenul de minim **2** cifre și maxim **9** cifre nenule și returnează prin intermediul celui de-al doilea parametru, **y**, numărul obținut din **x** prin eliminarea primei și a ultimei cifre. Subprogramul returnează valoarea **1** dacă numărul **x** începe și se termină cu aceeași cifră.

      Exemplu: dacă **x=12341**, subprogramul returnează valoarea **1** deoarece numărul **x** începe și se termină cu aceeași cifră, iar **y=234**. **(6p.)**

   b) Scrieți un program Pascal care citește de la tastatură **n** numere naturale nenule de minim **2** cifre și maxim **9** cifre, $1 \leq n \leq 100$, și folosind apeluri utile ale subprogramului de la punctul a) determină și afișează pe ecran câte dintre cele **n** numere sunt palindrom. În cazul în care nu există în șir numere palindrom se va afișa un mesaj corespunzător. **(4p.)**

      Exemplu: pentru **n=5** și numerele **12341, 454, 11, 89, 4567**, se va afișa **2** (numerele **454** și **11**).

4. Fișierul text ***bac.in*** conține cel mult 100000 de numere naturale.
   a) Folosind un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare scrieți un program Pascal care citește numerele din fișier și determină primul și ultimul număr din șir, precum și pozițiile acestora, care au cele mai multe cifre egale cu **1** în scrierea lor în baza **2**. Rezultatul se va afișa în fișierul text ***bac.out***. **(6p.)**
   b) Descrieți în limbaj natural metoda utilizată justificând eficiența acesteia. **(4p.)**

   Exemplu: dacă fișierul ***bac.in*** conține numerele **4, 5, 9, 13, 6, 11, 10, 14, 2, 1**, se va afișa în ***bac.out*** **13, 14**, pozițiile **4**, respectiv **8**.

Testul 4

Grațiela Ghiordunescu [6]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Ce afișează expresia 28 / 5 + 28 % 5 / 3? **(4p.)**
   a) 6 b) 6.6 c) 7 d) 6.5

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Se consideră algoritmul următor, descris în pseudocod. S-a notat cu `x%y` restul împărțirii numărului întreg `x` la numărul întreg nenul `y` și cu `[a]` partea întreagă a numărului real `a`.

```
citeste x (numar natural)
y←0
z←0
p←1
cat timp x≠0 executa
|   daca x%2=0 atunci
|   |  y←y*10+x%10
|   altfel
|   |  z←p*(x%10)+z
|   |_ p←p*10;
|_  x←[x/10]
scrie y," ", z
```

   a) Scrieți valorile ce se vor afișa în urma executării algoritmului de mai sus dacă se citește **x=102035**. **(6p.)**
   b) Scrieți un număr de 3 cifre care poate fi citit pentru variabila **x** astfel încât algoritmul să afișeze valorile **0 1**. **(4p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, în care să se înlocuiască structura **cat timp...executa** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

[6] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești, grati_1999@yahoo.com

d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Matricea de adiacență a unui graf neorientat cu **8** linii are exact **20** valori nenule și suma elementelor de pe fiecare linie este mai mare sau egală cu **2**. Care este valoarea maximă pe care o poate avea gradul unui nod într-un astfel de graf? **(4p.)**

   a) 7 b) 6 c) 5 d) 4

2. Se consideră un arbore cu rădăcină reprezentat în memorie cu ajutorul vectorului de tați **T=(2, 3, 0, 3, 3, 2, 6, 6, 4, 9)**. Stabiliți care dintre următoarele noduri sunt extremități finale ale unor lanțuri de lungime pară care au ca extremitate inițială rădăcina arborelui. **(4p.)**

   a) 2 2 4 5 b) 10 3 c) 1 6 9 d) 2 4 5

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

3. În declararea de mai jos, câmpurile **x** și **y** ale înregistrării pot memora coordonatele carteziene ale unui punct din planul xOy. Scrieți condiția care verifică dacă punctele `A`, `B` și `C` formează un triunghi echilateral. **(6p.)**

```
struct punct { float x,y; } A,B,C;
```

4. Scrieți ce se afișează pe ecran în urma executării secvenței de program de mai jos, în care variabila **s** memorează un șir de cel mult 20 caractere, iar variabila **i** este de tip întreg. **(6p.)**

```
strcpy(s,"bacalaureat");
for (int i=1;i<strlen(s);i++)
            if (strchr("aeiou",s[i]))
                    strcpy(s+i,s+i+1);
cout<<s;
```

5. Se consideră o progresie aritmetică cu primul termen **p** și rația **r**. Să se construiască o matrice pătratică cu **n** linii și **n** coloane care să conțină termenii acestei progresii astfel:
   - prima coloană va conține primii **n** termeni, în ordine, de sus în jos
   - a doua coloană va conține următorii **n** termeni, în ordine, de sus în jos și așa mai departe.

   Programul va afișa pe ecran elementele matricei, câte o linie a matricei pe o linei a ecranului, elementele de pe fiecare linie fiind separate prin câte un spațiu. **(10p.)**

   Exemplu: Pentru **p=-2, r=2** și **n=3** matricea va fi

$$\begin{matrix} -2 & 4 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{matrix}$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Utilizând metoda backtracking se generează numere de **3** cifre impare, cifre care aparțin mulțimii {**9, 8, 1, 6, 3, 2**} Primele **4** soluții sunt **999, 991, 993, 919**. Care este cea de a **9** - a soluție? **(4p.)**

   a) 931 b) 939 c) 933 d) 193

2. Subprogramul **sub** este definit în dreapta. Ce se afișează ca urmare a apelului `sub(2024,2)`? **(6p.)**

```
void sub(int x,int nr) {
 if(x*nr>0) {
    if(x%4==0)
       cout<<x<<" ";
    sub(x-4,nr-1);
  }
 cout<<x<<" ";
 }
```

3. Scrieți definiția completă a unui subprogram **f** cu trei parametri: **a** un număr natural nenul având maxim 8 cifre, **n** un număr natural nenul mai mic ca 10 și **s** care returnează suma primelor **n** zecimale ale numărului real $\mathbf{a}^{-1}$. **(10p.)**

   Exemplu: Pentru **f(4,3,s)**, *s* va avea valoarea **7** deoarece $4^{-1} = 0.25000$ și suma primelor 3 zecimale este 2+5+0=7.

4. În fișierul **bac.in** se află cel mult un milion de numere naturale cu maxim **9** cifre separate între ele prin câte un spațiu.

   a) Scrieți în limbajul C/C++ un algoritm, eficient din punct de vedere al memoriei și al timpului de execuție, care citește din fișier datele existente și determină și afișează în fișierul **bac.out**, numarul cel mai mare din fișierul **bac.in** care este egal cu suma numerelor vecine. În cazul în care nu există astfel de numere se afișează mesajul NU EXISTA. **(8p.)**

   b) Descrieți succint în limbaj natural, metoda de rezolvare folosită, explicând în ce constă eficiența ei. **(2p.)**

   Exemplu:

bac.in	bac.out
2 2 70 3 33 30 7 17 10	33

Testul 5

Cătălina Enescu [7]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabila **x** este de tip real. Care dintre următoarele expresii C/C++ are valoarea **1** dacă și numai dacă numărul real memorat în variabila **x** nu aparține intervalului **(1,8]**? **(4p.)**

[7] Profesor, Liceul Teoretic ,,Ion Cantacuzino", Pitești, catalina.enescu@yahoo.com

a) `(x>1) && (x<=8)`
b) `(x<=1) && (x>8)`
c) `(x<=1) || (x>8)`
d) `(x<1) || (x>8)`

2. Algoritmul de mai jos este reprezentat în pseudocod.

```
citeste x (numar natural)
nr←0
cat timp  x!=0  executa
|   citeste y (numar natural)
|   daca x%2 = y%2 atunci
|   |_  nr←nr + 1
|_  x←y
scrie nr
```

a) Ce se va afișa pentru șirul de valori **2 4 6 5 7 4 3 0**? **(6p.)**
b) Dați un exemplu de șir de cel puțin două valori pentru care valoarea afișată va fi **0**. **(4p.)**
c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structură **cat timp... executa** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**
d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Un graf neorientat are 9 noduri. Numărul minim de muchii pe care trebuie să le aibă graful astfel încât să nu existe noduri izolate este: **(4p.)**

a) 5 b) 8 c) 9 d) 36

2. Câți frați are nodul **1** din arborele cu rădăcină cu **7** noduri, numerotate de la 1 la 7, având următorul vector ,,de tați": **(5,1,5,1,0,7,5)**? **(4p.)**

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

3. Pentru un elev, în variabila e se memorează următoarele informații: nume (un șir de cel mult 20 de caractere), data nașterii (ziua, luna și anul) și media anuală. Ştiind că expresiile C/C++ de mai jos au ca valori ziua (un număr natural din intervalul [1,31]), luna (un număr natural din intervalul [1,12]) și anul nașterii (număr natural), respectiv media anuală (un număr real), scrieți definiția unei structuri cu eticheta **elev**, care permite memorarea informațiilor pentru un elev, și declarați corespunzător variabila **e**.

e.nume, **e.data.zi**, **e.data.luna**, **e.data.an**, **e.medie** **(6p.)**

4. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un șir de cel mult 50 de caractere (litere mici și mari ale alfabetului englez, cifre și spații) și afișează pe ecran litera mare cel mai des întâlnită în șirul citit. Dacă există mai multe litere mari cu număr maxim de apariții, programul o va afișa pe prima dintre ele în ordine alfabetică. Dacă șirul nu conține litere mari, atunci pe ecran se va afișa mesajul **nu**.

Exemplu: Dacă se citește șirul

MERGEM LA MARE

atunci se va afișa: **E** (pentru că literele E și M apar de cele mai multe ori în șir și E este prima dintre ele în ordine alfabetică). **(6p.)**

5. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural `n` (`n`∈[3,50]) și construiește în memorie un tablou bidimensional cu `n` linii și `n` coloane, astfel încât:
   a) fiecare element aflat pe diagonala secundară va avea valoarea `n`;
   b) elementele aflate strict deasupra diagonalei secundare vor fi primele `n(n-1)/2` pătrate perfecte nenule;
   c) elementele aflate strict sub diagonala secundară vor avea valoarea **1**.

   Programul afișează pe ecran tabloul obținut, câte o linie a tabloului pe câte o linie a ecranului, elementele fiecărei linii fiind separate prin câte un spațiu. **(10p)**

Exemplu: Dacă `n=4`, se afișează pe ecran

1	4	9	4
16	25	4	1
36	4	1	1
4	1	1	1

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră subprogramul `f`, declarat în dreapta.
   Valoarea `f(23169)` este: **(4p.)**
   a) 21
   b) 15
   c) 5
   d) 8

```
int f(int n){
 if (n==0)
  return 0;
 else
  if (n%2==0)
   return n%10+f(n/10);
  else
   return f(n/10);
}
```

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Utilizând metoda backtracking, se generează toate posibilitățile de a forma echipe diferite de câte 4 persoane din mulțimea **{Ionuț, Maria, Mihai, Ana, Mihaela, Gabriel}**, astfel încât în fiecare echipă să fie exact doi băieți și două fete. Primele două soluții generate sunt, în această ordine, (**Ionuț, Maria, Mihai, Ana**), (**Ionuț, Maria, Mihai, Mihaela,**). Scrieți, în ordinea obținerii, ultimele două soluții generate. **(6p.)**
3. Se consideră subprogramul **perechi**, cu cinci parametri: **a, b, c, n** numere naturale distincte, **v** vector cu cel mult 100 de elemente numere naturale distincte. Subprogramul afișează toate perechile **(x,y)** cu proprietatea că **x** și **y** sunt numere diferite din **v**, care verifică ecuația $\mathbf{ax^2 + by^2 = c}$. Dacă nu există astfel de valori, se va afișa **Nu.**

   Exemplu: Dacă **a=1, b=1, c=25, n=5, v=(3 18 5 0 4)**, atunci se vor afișa perechile **(3,4) (4,3) (0,5) (5,0)**, nu neapărat în această ordine. **(10p.)**
4. Fișierul **bac.in** conține pe prima linie două valori naturale, **m** și **n** (**m**≤100, **n**≤100), pe a doua linie un șir de **m** numere întregi, iar pe a treia linie un șir de **n** numere întregi. Fiecare dintre aceste șiruri sunt ordonate strict crescător, iar elementele lor au cel mult 9 cifre fiecare. Numerele de pe același rând sunt separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran câte dintre elementele celui de al doilea șir nu se regăsesc și în primul șir.

   Exemplu: Dacă fișierul are conținutul
   6 7
   1 2 3 4 7 20

3 5 7 8 9 20 24
se va afișa valoarea **4** (numerele care respectă condiția sunt **5 8 9 24**).

a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului descris. **(8p.)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Viorel Păun [1]

1. Fie mulțimea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $A_1, A_2, \ldots, A_m$ submulțimi ale mulțimii M.

   Spunem că două mulțimi A_i și A_j fac parte din aceeași familie dacă A_i și A_j au cel puțin un element comun. În plus dacă A_i și A_j sunt din aceeași familie și A_i și A_k sunt din aceeași familie atunci A_i, A_j și A_k sunt din aceeași familie.

   Elaborați un program C++ pentru determinarea numărului de familii ce se formează și a mulțimilor ce formează fiecare familie. Pentru implementare considerăm $n \leq 1000$ și $m \leq 50$.
2. a) Fiind date n numere întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nu în mod necesar diferite, să se determine printr-un program C++ o submulțime a acestei mulțimi de numere cu proprietatea că suma elementelor sale este divizibilă prin n.
   b) Evaluați complexitatea și eficiența algoritmului utilizat.

Testul 2

Viorel Păun [1]

1. Fie mulțimea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $A_1, A_2, \ldots, A_m$ submulțimi ale mulțimii M.

   Elaborați un program C++ pentru a determina un număr minim de mulțimi

   $$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

   astfel încât

   $$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m.$$

   Pentru implementare considerăm $n \leq 1000$ și $m \leq 50$.
2. a) Elaborați un program C++ pentru calculul integralei

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$$

   utilizând formulele de recurență dependente de n și m.
   b) Elaborați un program C++ pentru calculul aproximativ al integralei

   $$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

   Indicație. Se pot utiliza, de exemplu, sumele Riemann sau Darboux.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, viop23@yahoo.com

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Cristina Tudose [1]

1. Se consideră următoarea secvență de cod:

```
int a = 15, b = 023, c = 0x52;
int x = a - b + c;
cout<<x;
```

Care dintre următoarele variante este rezultatul afișat după executarea acestei secvențe de cod?

a) 15 b) 78 c) 116 d) 44

2. În urma secvenței de cod

```
int a = 5, *p, b = 2;
p = &a;
*p *= a;
p = &b;
b *= a;
cout<<a<<" "<<b<<" "<<*p;
```

se tipărește:

a) 5 2 2 b) 5 25 50 c) 25 50 50 d) 25 2 50

3. Ce se va afișa în urma executării programului următor?

```
int f1(int);
int f2(int);
int f1(int n){
    if(n==0) return 1;
    return f1(n-1)+f2(n-1);
}
int f2(int n){
    if(n==0) return 2;
    return 2+f1(n-1)-f2(n-1);
}
int main(){
    cout<<f1(4)<<" "<<f2(4);
    return 0;
}
```

a) 3 1 b) 2 7 c) 10 10 d) 10 8

4. Fie funcția:

```
void f(int &a, int b){
    int t;
    t=a;
    a=b;
    b=t;
}
```

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, cristina.tudose21@gmail.com

Se consideră două variabile întregi $a = 200$, $b = 300$. Ce valoare va avea suma $a + b$ după apelul $f(a, b)$?

a) 500 b) 501 c) 600 d) 401

5. Fie secvența de cod

```
int i, j, s=0;
for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<n;j++){
        if(a[i][j] % 2) continue;
        s+=a[i][j];
        }
```

unde a este o matrice pătratică de numere întregi, având dimensiunea n, cu liniile și coloanele numerotate de la 0. Ce se va salva în variabila s după executarea secvenței?

a) Suma elementelor pare.
b) Primul element par.
c) Suma elementelor impare.
d) Primul element impar.

6. Se consideră următoarea secvență de cod:

```
int **a;
int x[3]={2,7,3};
int y[3]={33,44,22};
a = new int*[2];
a[0]=y;
a[1]=x;
x[1]=55;
int s=0;
for(int i=0;i<2;i++)
    s+=a[i][i];
cout<<s;
```

Care va fi valoarea variabilei s după executarea acesteia?

a) 88 b) 40 c) 46 d) 50

7. Fie v un vector sortat cu n elemente întregi, pe poziții numerotate de la 1 la n. Secvența de cod de mai jos realizează căutarea binară a numărului x în vectorul v.

```
int p=1, u=n, poz=-1;
while(p<=u)
{
    int m=(p+u)/2;
    if(v[m]==x)
    {
        poz=m;
        break;
    }
    if(x<v[m])
        u=m-1;
    else
        p=m+1;
}
cout<<poz;
```

Dacă $v = (2, 4, 7, 10, 25, 36, 45, 78, 89, 92, 95, 98, 100)$, $n = 13$ și $x = 2$, numărul de înjumătățiri ale intervalului este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0

8. Se consideră o stivă şi o coadă inițial vide. Se introduc pe rând în coadă primele șase numere prime, în ordine descrescătoare. Se extrag apoi din coadă trei elemente și se adaugă în stivă, în ordinea în care au fost extrase. Care este elementul din vârful stivei după executarea acestor operații?

a) 5 b) 13 c) 7 d) 2

9. Fie v un vector cu n elemente întregi, pe poziții numerotate de la 1 la n și secvența de cod de mai jos care realizează ordonarea crescătoare a elementelor acestuia.

```
for(i=1;i<n;i++)
for(j=i+1;j<=n;j++)
if(v[i]>v[j]){
    aux=v[i]; v[i]=v[j]; v[j]=aux;
}
```

Numărul total de comparații între elementele vectorului este:

a) $n(n+1)/2$ b) $n(n-1)/2$
c) $(n-1)(n-2)/2$ d) $n/2$

10. Ce se afișează ca urmare a executării secvenței de cod următoare?

```
char a[12]="INFORMATICA";
for(int i=2; i<12; i++)
    a[i-2]=a[i];
a[0]='D';
a[2]='G';
cout<<a;
```

a) IORMATICA b) CADOGMATICA
c) DOGMATICA d) eroare

11. Ce calculează următoarea funcție?

```
int functie(int a, int b){
  while(a!=b)
      if(a>b)
          a-=b;
      else
          b-=a;
return b;
}
```

a) Cel mai mic multiplu comun al lui a și b. b) Cel mai mare divizor comun al lui a și b.
c) Modulul diferenței $a-b$. d) Cel mai mare număr dintre a și b.

12. Se folosește metoda backtracking pentru a genera submulțimile nevide ale mulțimii $\{11, 12, 13, 14, 15\}$ care conțin numai elemente impare. Câte soluții s-au generat?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

13. Numărul maxim de muchii ale unui graf neorientat ce are 10 noduri și două componente conexe este egal cu:

a) 20 b) 100 c) 45 d) 36

14. Dacă G este un graf neorientat cu 10 noduri și 10 muchii atunci:

a) G este conex
b) G este un arbore
c) G conține cicluri
d) toate gradele nodurilor sunt egale cu 1.

15. Următoarele numere nu pot fi gradele nodurilor unui graf cu 6 noduri:

a) 1, 2, 2, 3, 4, 4
b) 1, 1, 2, 4, 4, 4
c) 1, 2, 2, 3, 3, 5
d) 1, 1, 3, 3, 4, 4.

Testul 2

Cristina Tudose [2]

1. Ce se va tipări după executarea următoarei secvențe de cod?

```
float x=2.25e+02;
int t=2*x;
cout<<t;
```

a) 450 b) 4 c) 4.5 d) 5

2. În urma executării secvenței

```
int a = 5, *p=&a;
a*=*p;
cout<<a<<" "<<*p;
```

se va afișa:

a) 5 5 b) 25 25 c) 25 5 d) 5 25

3. Fie doi vectori A și B ordonați crescător, cu m respectiv n elemente, pe poziții numerotate de la 1. Prin algoritmul de interclasare, prezentat mai jos, se obține vectorul ordonat C care conține toate elementele din A și B.

```
i=1; j=1; k=1;
while (i<=m && j<=n)
{
    if (A[i]<=B[j])
    {
        C[k]=A[i]; i++;
    }
    else
    {
        C[k]=B[j]; j++;
    }
    k++;
}
while (i<=m)
{
    C[k]=A[i];  i++;  k++;
}
while (j<=n)
{
    C[k]=B[j];  j++;  k++;
}
```

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, cristina.tudose21@gmail.com

Care este complexitatea algoritmului?

a) $O(m+n)$ b) $O(log_2(m+n))$
c) $O(log_2(m \cdot n))$ d) $O(n \cdot log_2(n))$

4. Care va fi valoarea salvată în variabila s după executarea codului următor?

```
int **a,i,j,s;
a = new int*[3];
for(int i=0;i<3;i++){
    a[i] = new int[3];
    for(j=0;j<3;j++)
        a[i][j]=2*i+j+2;
    }
s=0;
for(int i=1;i<3;i++)
    for(int j=1;j<3;j++)
        s+=a[i][j];
```

a) 38 b) 40 c) 26 d) 30

5. Ce se va tipări după executarea următoarei secvențe?

```
int i, j;
for(i=1;i<=15;i++)
    for(j=1;j<=15;j++)
        if(i>j) break;
cout<<i+j;
```

a) 16 b) 3 c) 15 d) 17

6. Ce valoare va avea variabila intreagă y după executarea secvenței de cod următoare?

```
int x=30, y=40;
if ((x<y ? y : x) > 30)
    y+=x;
else
    y-=x;
```

a) 10 b) 70 c) 40 d) 50

7. Fie funcția:

```
int f(int n){
    if(n==0) return -1;
    return n*f(n-1)+2;
}
```

Ce valoare va avea variabila intreagă x în urma apelului $x = f(4)$?

a) -1 b) 1 c) 58 d) 5

8. Se folosește metoda backtracking pentru a genera toate numerele de patru cifre care au suma cifrelor egală cu 12. Primele cinci soluții generate sunt: 1029, 1038, 1047, 1056, 1065. A câta soluție este 1137?

a) a zecea
b) a douăsprezecea
c) a unsprezecea
d) nu este soluție

9. Ce se va afișa ca urmare a executării următoarei secvențe?

```
int i=5, t=8;
switch(i%4){
     case 0: t-=3;
     case 1: t/=4;
     case 2: t+=5; break;
     case 3: t*=6;
}
i+=--t;
cout<<t--;
t-=i++;
```

a) 5 b) 2 c) 6 d) 7

10. Se consideră o matrice pătratică de dimensiune n având liniile și coloanele numerotate de la 0 la $n-1$. Condiția ca elementul de pe linia i și coloana j să fie situat sub diagonala secundară este:

a) $i+j>n-1$
b) $i+j>n$
c) $i+j<n-1$
d) $i+j<n$

11. Ce se va afișa în urma executării programului următor?

```
void func(int a[]){
   for(int i=1;i<4;i++)
       a[i]++;
}
int main(){
int x[5]={1,1,0,5,3};
func(x);
cout<<x[1]+x[4];
return 0;
}
```

a) 3 b) 4 c) 7 d) 5

12. În urma executării secvenței

```
unsigned int t=13, i = 7;
t = (t>>2) + (i^5);
cout<<t;
```

se tipărește:

a) 10 b) 5 c) 20 d) 30

13. Înălțimea minimă a unui arbore binar strict (orice nod are 0 sau 2 descendenți) cu 2019 noduri este egală cu:

a) 11 b) 8 c) 9 d) 10

14. Numărul maxim de cicluri ale unui graf neorientat ce are 2018 noduri și toate gradele nodurilor din mulțimea $\{0, 1, 2\}$ este:

a) 672 b) 504 c) 1009 d) 673

15. Numărul minim de componente conexe ale unui graf neorientat ce are 10 noduri și 6 muchii este egal cu:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a V-a

M 1. Arătați că oricare ar fi k număr natural, $k \geq 4$, există numere de forma $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ astfel încât suma resturilor împărțirii lor la $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, respectiv a_k să fie $8k - 1$.

Marian Haiducu, Pitești

M 2. Un ogar urmărește o vulpe care are 12 sărituri avans. Câte sărituri va face ogarul până să ajungă vulpea știind că, în timp ce ogarul face 7 sărituri, vulpea face 8 sărituri și că distanța parcursă de ogar în 5 sărituri este aceeași cu cea parcursă de vulpe în 6 sărituri?

Marius Antonescu, Coșești, Argeș

M 3. Figura 1 este formată din 4 pătrate în care sunt scrise numerele naturale a, b, c, d. Printr-o *operație* înțelegem înlocuirea numerelor din două pătrate care au o latură comună cu succesorii acestora. După mai multe operații se obține Figura 2. Ştiind că $a + b + c + d = 43$, aflați numărul b.

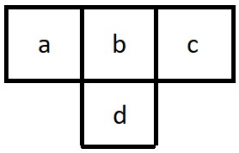


Fig. 1

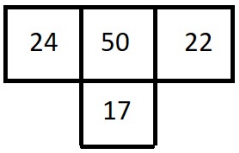


Fig. 2

Mugurel Simion, Ştefănești, Argeș

M 4. Fie x, y, z numere naturale astfel încât x are ultima cifră 5, y este un număr prim, $y \geq 5$, iar restul împărțirii lui z la 15 este egal cu 7. Dacă $N = 3x + y + 2z$, determinaţi valorile posibile ale restului obţinut împărţindu-l pe N la 6.

Andreea Oprea și *Adrian Ţurcanu*, Pitești

M 5. Să se determine cifra x astfel încât $\overline{19x74} \vdots \overline{x3}$.

Iulia Cucu și *Adrian Ţurcanu*, Pitești

Clasa a VI-a

M 6. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la $2n - 1$, $n \geq 4$. Se șterg, la întâmplare, două numere de pe tablă și se scrie suma lor. Este posibil ca, repetând procedeul, să obținem $n - 1$ numere distincte divizibile cu 5? Justificați răspunsul.

Marian Haiducu, Pitești

M 7. a) Câte fracții cu numărătorul 2018 sunt cuprinse între $\frac{1}{11}$ și $\frac{1}{10}$.

b) Câte fracții cu numărătorul cel mult n sunt cuprinse între $\frac{1}{n+1}$ și $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$?

Radu Deaconescu, Pitești

M 8. Produsul divizorilor naturali ai numărului natural n este 210^{3240}. Scriind divizorii numărului n în ordine crescătoare $d_1 = 1 < d_2 < d_3 < ... < d_k = n$, arătați că d_{1289} are cel puțin 11 cifre.

Florin Antohe, Galați

M 9. În triunghiul ABC bisectoarea unghiului A și mediatoarea laturii AB se intersectează într-un punct $M \in BC$. Să se demonstreze că măsura unghiului dintre ele este mai mare de $30°$.

Marius Antonescu, Coșești, Argeș

M 10. Fie p și q numere prime și $S = p + q + p^2 + q^2 + pq + p^2q + pq^2 + p^2q^2$.

a) Arătați că S este un număr compus.

b) Dacă $p + q$ este divizibil cu 3, atunci arătați că S nu este pătrat perfect.

Mugurel Simion, Ştefănești, Argeș

Clasa a VII-a

M 11. Fie a, b, c numere naturale astfel încât $n = \left(7^a - 2^b\right)\left(7^b - 2^c\right)\left(7^c - 2^a\right)$ este natural. Arătați că n nu este pătrat perfect.

Marian Haiducu, Pitești

M 12. Fie ΔABC cu $m(\sphericalangle A) = \frac{m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)}{2}$. Dacă BD, respectiv CE sunt înălțimi ale triunghiului ABC, atunci arătați că $DE = \frac{BC}{2}$.

Corina Roxana Mărcușanu, Pitești

M 13. Dacă a, b, c, d sunt numerele reale pozitive demonstrați că:

$\frac{a^4}{b^2c} + \frac{b^4}{c^2d} + \frac{c^4}{d^2a} + \frac{d^4}{a^2c} \geq a + b + c + d$. Când are loc egalitatea?

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 14. În triunghiul ABC, mediatoarea laturii $[BC]$ și bisectoarea unghiului A sunt concurente în punctul Q situat pe linia mijlocie $[MN]$ a triunghiului ABC, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Arătați că triunghiurile MQB și NQC au arii diferite.

Mihai Burdușa, Pitești

M 15. a) Fie $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104}$. Arătați că $S_1 < \frac{1}{18}$.

b) Fie $S_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \ldots + 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104$. Arătați că S_2 nu este pătrat perfect.

Radu Deaconescu, Pitești

Clasa a VIII-a

M 16. Fie $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Să se determine funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, pentru care

$$\frac{a}{b} \cdot \left(f(x) - \frac{ax}{b}\right) \leq \frac{1}{x} \leq \frac{b}{a} \cdot \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{bx}{a}\right),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 17. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $abc = 1$. Arătați că

$$a(b+c)^4 + b(a+c)^4 + c(a+b)^4 \geq 12(ab+ac+bc) + 4(a^2+b^2+c^2) \geq 16\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

M 18. Fie $ABCD$ tetraedru în care $\mathrm{m}(\sphericalangle BAC)=\mathrm{m}(\sphericalangle CBD)=90^\circ$. Dacă E este mijlocul segmentului $[CD]$, demonstrați inegalitatea $\sqrt{3} \cdot CD > P_{ABE}$, unde P_{ABE} reprezintă perimetrul triunghiului ABE.

Florin Stănescu, Găești

M 19. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) =$ "partea întreagă a volumului piramidei triunghiulare regulate cu latura bazei de lungime x și înălțimea de lungime $\sqrt{3}$".

Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$A = \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(4)} + \ldots + \frac{1}{f(2018)}$$

Mihai Burdușa și *Adrian Ţurcanu*, Pitești

M 20. Fie $VA_1A_2 \ldots A_n$ piramidă cu baza poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, situat într-un plan α. Pentru $p \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ arbitrar fixat, fie G_1 centrul de greutate al triunghiului $VA_{p-1}A_p$ și G_2 centrul de greutate al triunghiului VA_pA_{p+1}. Fie $P \in (VA_{p-1})$ și $R \in (VA_{p+1})$. Arătați că $PR \| \alpha$ dacă şi numai dacă PG_1, VA_p şi RG_2 sunt concurente.

Marian Haiducu, Pitești

Clasa a IX-a

M 21. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \geq 0$ are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2+x)^k}{2+kx} \geq 2^n - 1.$$

Când are loc egalitatea?

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 22. Demonstrați identitatea

$$\left[\sum_{k=n}^{2n-1} \left\{ \sqrt{k(k+1)} \right\} \right] = \left[\frac{n-1}{2} \right], \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

Nicolae Stăniloiu, Bocșa

M 23. Rezolvați în $(0, \infty)^6$ sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 = 3 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 9 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = 1 \end{cases}.$$

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

M 24. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $(4\cos^2 x - 3)(4\cos^2 3x - 3) = 2\sin x$;

b) $\dfrac{\cos^3 x + \cos^3 5x + \cos^3 9x + \cos^3 13x}{\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \cos 13x} = \dfrac{3}{4}$.

Marin Chirciu, Pitești

M 25. Fie ABC un triunghi având toate unghiurile mai mici decât $\frac{2\pi}{3}$ și fie T punctul Torricelli-Fermat al acestuia. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle CTA$ și $\sphericalangle ATB$ intersectează laturile $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$ în punctele D, E și respectiv F. Arătați că $AB + BC + CA \geq 2(DE + EF + FD)$.

Leonard Giugiuc, România, *Kadir Altintas*, Turcia
și *Miguel Ochoa Sanchez*, Peru

Clasa a X-a

M 26. a) Determinați funcția strict crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface condiția

$$2f(x) + f(f(x)) = 3x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3\left(x^{\log_5 6} - 1\right) = 2x + (x+1)^{\log_6 5}.$$

Marin Chirciu, Pitești

M 27. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y} + 2^x = y - \sqrt[3]{x} + 2^y \\ 2^{2x} - (9-y)\cdot 2^x + 8 + 6x - 2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 28. Fie $r_n = \sqrt{n\sqrt{(n-1)\sqrt{(n-2)\ldots\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{1}}}}}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $r_n \leq \left(\dfrac{(n-1)2^n + 1}{2^n - 1}\right)^{1-\frac{1}{2^n}}$.

b) $\dfrac{n}{r_n} \in [1, \sqrt{n}\,]$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 29. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$ și fie D mijlocul laturii BC. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile BAM și CAN astfel încât $AM = AB$, $AN = AC$ și $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle CAN) = \alpha$. Demonstrați că $AD \perp MN$ dacă și numai dacă $\alpha = 90°$.

Nicolae Stăniloiu, Bocșa

M 30. Fie ABC un triunghi nedreptunghic, O centrul cercului circumscris acestuia, iar D, E și F mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ și respectiv $[AB]$. Fie $DO \cap AC = \{X\}$, $EO \cap AB = \{Y\}$ și $FO \cap BC = \{Z\}$. Arătați că

$$\frac{AX}{XC} \cdot \frac{BY}{YA} \cdot \frac{CZ}{ZB} = \left|\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\right|$$

(notațiile fiind cele obișnuite).

Van Khea, Cambodgia și *Leonard Giugiuc*, România

Clasa a XI-a

M 31. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = 2AB - BA$. Demonstrați că

$$\det(AB - BA) = 0.$$

(În legătură cu problema XI.459, R.M.T. nr. 2/2017, punctul a).)

Daniel Jinga, Pitești

M 32. Arătați că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ au loc următoarele inegalități:

a) $\det(A^2 + B^2 - BA) \geq \det(AB - BA)$;

b) $\det\left((A - B)(A + B) - 2(A^2 + B^2)\right) \geq 4\det(AB - BA)$.

Florin Stănescu, Găești

M 33. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$1 + 3 \cdot 2^{3x-2} \cdot 15^{x-1} = 8^{3x-2} - 15^{3x-3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

M 34. a) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Arătați că există $c_1, c_2 \in (a, b)$ astfel încât $f'(c_1) = \dfrac{f(c_1) - f(a)}{b - c_1}$ și $f'(c_2) = \dfrac{f(b) - f(c_2)}{c_2 - a}$.

b) Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ există o infinitate de funcții f derivabile pe $[a, b]$ pentru care valorile c_1 și c_2 definite la punctul a) sunt unice și egale.

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 35. Fie $a, b, c, d \in [-1, \infty)$ astfel încât $a + b + c + d = 0$. Arătați că

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 5(abc + abd + acd + bcd) \geq 4abcd.$$

Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XII-a

M 36. Pentru orice grup G și orice număr natural nenul n notăm

$$S_n(G) = \{a \in G \mid ax^n a = x,\ \forall\, x \in G\}.$$

a) Pentru $n \geq 2$, demonstrați că dacă $S_n(G) \neq \emptyset$, atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = e$, $\forall\, x \in G$ (e reprezintă elementul neutru al lui G). Rămâne adevărată afirmația pentru $n = 1$?

b) Demonstrați echivalența: există un grup G astfel încât $S_n(G) \setminus \{e\} \neq \emptyset$ dacă și numai dacă n este impar.

Marin Chirciu, Pitești

M 37. Fie s un număr real aparținând intervalului $(12, 18)$ și ABC un triunghi astfel încât $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = s$ și $R + r = \sqrt{3}$ ($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, iar R și r sunt raza cercului circumscris, respectiv raza cercului înscris triunghiului ABC). Exprimați aria triunghiului ABC în funcție de s.

Leonard Giugiuc, *Cristinel Mortici*, România și *Kadir Altintas*, Turcia

M 38. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculați integrala $I = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^4 + (x-b)^4}\, dx$.

Daniel Jinga, Pitești

M 39. Determinați funcțiile continue $f, g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile

$$f^3(x) - 3f(x)g^2(x) = \cos x,\ g^3(x) - 3f^2(x)g(x) = -\sin x,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

și pentru care aria suprafeței plane cuprinse între graficele lor este:

a) maximă; b) minimă.

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 40. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $0 < f'(x) < 1$ pentru orice $x \in (0, 1]$ și există $f''(0) \in \mathbb{R}^*$. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0 \in (0, 1]$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$, pentru orice $n \geq 0$. Demonstrați că $0 < x_{n+1} < x_n \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(x)\, dx \right) = \left(\frac{4}{f''(0)} \right)^2.$$

Florin Stănescu, Găești

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 1 (**becuatii**). Tică și Ionică sunt buni prieteni, pasionați de două lucruri: matematică și informatică. Aceștia participă la un concurs de propunători de probleme pe echipe. Pentru a avea succes Tică vrea să propună o problemă cu ecuații, iar Ionică o problemă cu mulțimi. După consultări repetate se decid să participe la concurs cu o problemă care folosește atât ecuații cât și mulțimi. În această problemă se dau N ecuații de forma $x^2 = A_i + y^2$, $1 \leq i \leq N$, și se notează cu S_i mulțimea soluțiilor celei de-a i-a ecuație, $S_i = \{(x, y) | x^2 = A_i + y^2,\ x, y \text{ numere naturale}\}$. Cerința problemei este determinarea a două numere $B = \text{card}(S_1) + \text{card}(S_2) + \ldots + \text{card}(S_n)$, respectiv $C = \text{card}\,(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$.

Cerință

Se cunosc N și numerele $A_1, A_2, \ldots, A_N$ și se cere să se determine numerele B și C.

Date de intrare

Din fișierul `becuatii.in` se citesc: numărul natural p de pe prima linie (ce poate avea două valori: 1 sau 2, corespunzătoare uneia din cele două cerințe, adică 1 pentru determinarea lui B, iar 2 pentru determinarea lui C), numărul N de pe a doua linie și de pe a treia linie numerele $A_1, A_2, \ldots, A_N$ cu câte un spațiu între ele.

Date de ieșire

În fișierul `becuatii.out` se va scrie numărul B, dacă $p = 1$ și respectiv numărul C, dacă $p = 2$, cu semnificația din enunț.

Restricții și precizări

- $1 < N \leq 10000$, număr natural
- A_i sunt numere naturale nenule mai mici strict decât 1000, $1 \leq i \leq N$
- Pentru o mulțime M, card(M) reprezintă numărul de elemente al mulțimii M
- Pentru mulțimile M și P, notăm cu $M \cup P$ reuniunea dintre M și P

Exemple

`becuatii.in`	`becuatii.out`	Explicație
1 2 1 21	3	$p = 1$ și deci afișăm B. Prima ecuație este $x^2 = 1 + y^2$, iar a doua ecuație este $x^2 = 21 + y^2$. Mulțimile soluțiilor sunt $S_1 = \{(1, 0)\}$ și $S_2 = \{(11, 10), (5, 2)\}$. În acest caz $B = 1 + 2 = 3$.

becuatii.in	becuatii.out	Explicație
2 2 1 21	3	$p = 2$ și deci afișăm C. Prima ecuație este $x^2 = 1 + y^2$, iar a doua ecuație este $x^2 = 21 + y^2$. Mulțimile soluțiilor sunt $S_1 = \{(1, 0)\}$ și $S_2 = \{(11, 10), (5, 2)\}$, deci $S_1 \cup S_2 = \{(1, 0), (11, 10), (5, 2)\}$, deci $C = \text{card}(S_1 \cup S_2) = 3$.

Timp maxim de execuție: 0.04 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Micul Gates, 2017)

I 2 (**castel**). În pivnița unui castel se află un cufăr ce conține obiecte de valoare foarte mare. Toate ușile până la pivniță se deschid dacă se introduce un cod numeric format din cifre zecimale, cod care este scris pe ușă pentru a facilita deplasarea mai ușoară prin castel. Pentru a obține aceste obiecte trebuie să se treacă de două obstacole:

1. ușa de la intrarea în pivniță, care se deschide doar dacă se introduce un cod format din cifre zecimale, notat cu *codP*;
2. capacul cufărului, care se deschide dacă se cunoaște un cod format din cifre zecimale, notat cu *codC*.

Codurile de deschidere a celor N uși ale castelului, prin care se trece pentru a ajunge în fața pivniței, se cunosc: $x_1, x_2, \ldots, x_N$, numere naturale.

Codul *codP*, necesar deschiderii pivniței, se obține determinând numărul de zerouri de la sfârșitul numărului $Max!$, unde Max este cel mai mare dintre codurile celor N uși, $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Codul *codC*, necesar deschiderii cufărului, se obține determinând numărul de divizori ai produsului factorialelor codurilor de pe cele N uși ale castelului: $x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_N!$.

Cerință

Cunoscând numărul de uși, N, și codurile lor $x_1, x_2, \ldots, x_N$, se cere:

1. codul *codP* de deschidere a ușii pivniței;
2. codul *codC* de deschidere a cufărului.

Date de intrare

Fișierul de intrare `castel.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află N, iar pe linia a treia se află numerele $x_1, x_2, \ldots, x_N$, separate prin câte un spațiu, reprezentând codurile de deschidere a celor N uși din castel.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `castel.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând codul *codP* de deschidere a ușii pivniței.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `castel.out` se va scrie un singur număr natural, reprezentând codul de deschidere a cufărului modulo 9973, adică numărul *codC* % 9973.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 10000$
- $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_N \leq 10000$
- $a\%b$ reprezintă restul împărțirii lui a la b
- $k!$ este notația pentru produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$
- Pentru determinarea corectă a codului pivniței, *codP*, se acordă 30% din punctaj

Exemple

`castel.in`	`castel.out`	Explicație
1 5 3 6 4 6 2	1	$p = 1$ *codP* este numărul de zerouri în care se termină numărul $6! = 720$, adică 1.

`castel.in`	`castel.out`	Explicație
2 5 3 6 4 6 2	294	$p = 2$ *codC* este numărul de divizori ai produsului $3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 2!$, adică 294.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Violeta Bălan, Slatina

I 3 (relief). Vladino a început să studieze foarte mult formele de relief. Ca să nu lase informatica pe planul doi, profesorul său îi propune să rezolve o problemă cu trei forme de relief: munți, dealuri și văi, pentru un șir cu n numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Muntele se definește ca fiind o secvență maximală de numere din șirul dat de forma $x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k$, unde $x_i < x_{i+1} < \ldots < x_j$, $x_j > x_{j+1} > \ldots > x_k$, $i < j < k$.

Dealul se definește ca fiind o secvență maximală de numere din șirul dat de forma $x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_h$, unde $x_i < x_{i+1} < \ldots < x_j$, $x_j = x_{j+1} = \ldots = x_k$, $x_k > x_{k+1} > \ldots > x_h$, $i < j < k < h$.

Valea se definește ca fiind o secvență maximală de numere din șirul dat de forma $x_i, \ldots, x_j$, unde $x_i = x_{i+1} = \ldots = x_j$, $i < j$.

Cerință

Cunoscând numărul n și cele n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se cere:

1. de câte ori apare cel mai mic număr în șirul x;
2. numerele de **munți**, **dealuri** și **văi**.

Date de intrare

Fișierul de intrare `relief.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află n, iar pe următoarea linie numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ separate între ele prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `relief.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând de câte ori apare cel mai mic număr în șirul x.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `relief.out` se vor scrie trei numere separate prin câte un spațiu, reprezentând numerele de **munți**, **dealuri** și **văi**.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100000$
- Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt $\leq 10^{10}$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj

Exemple

`relief.in`	`relief.out`	Explicație
1 14 4 5 6 5 5 5 7 8 11 11 10 6 4 4	3	p = 1 Cel mai mic număr în șir este 4, care apare de 3 ori.

`relief.in`	`relief.out`	Explicație
2 14 4 5 6 5 5 5 7 8 11 11 10 6 4 4	1 1 3	$p = 2$ Avem **muntele**: 4 5 6 5 Avem **dealul**: 5 7 8 11 11 10 6 4 Avem **văile**: 5 5 5 11 11 4 4.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Info-Oltenia, 2016)

I 4 (prime). Lui Vladino îi plac mult jocurile cu piese ce se așează pe table de dimensiune $m \times n$, precum cele de șah. De această dată Vladino are tot atâtea piese câte pătrățele are

tabla de șah, adică $m \cdot n$, pe ele aflându-se numerele $1, 2, \ldots, m \cdot n$. Toate piesele sunt așezate pe tablă în ordine crescătoare pe linii de la stânga la dreapta, ca mai jos:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \ldots & & & \\ (m-1)n & (m-1)n+1 & \ldots & m \cdot n \end{array}$$

Robertino vine în vizită la Vladino și îl pune pe acesta din urmă să țină ochii închiși, timp în care ia de pe tabla de șah trei piese, apoi îi propune să scrie un program care să determine numerele de pe piesele lipsă, cunoscând suma S a numerelor rămase pe tablă și faptul că acestea sunt numere prime. Dacă există mai multe soluții, se va alege cea care dă numărul cel mai mic prin alăturarea celor trei piese.

Cerință

Cunoscând numerele m, n și S se cere:

1. numerele de pe piesele luate de Robertino;
2. poziția în tablou (linie coloană) a celui mai mare număr de pe piesele luate de Robertino.

Date de intrare

Fișierul de intrare `prime.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află m, n si S, separate între ele prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `prime.out` se vor scrie cele trei numere de pe piesele luate de Robertino, în ordine crescătoare.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `prime.out` se va scrie poziția în tablou (linie coloană) a celui mai mare număr de pe piesele luate de Robertino.

Restricții și precizări

- $1 \leq m, n \leq 1000$
- $1 \leq S \leq 10^{10}$

Exemple

`prime.in`	`prime.out`	Explicație
1 3 4 58	2 7 11	$p = 1$ În tabloul de mai jos numerele de pe piesele luate de Robertino sunt scrise îngroșat: 1 **2** 3 4 5 6 **7** 8 9 10 **11** 12

prime.in	prime.out	Explicație
2 3 4 58	3 3	$p = 2$ În tabloul de mai jos numerele de pe piesele luate de Robertino sunt scrise îngroșat: 1 **2** 3 4 5 6 **7** 8 9 10 **11** 12 Cel mai mare număr de pe o piesă luată de Robertino este 11, aflat pe linia 3, coloana 3.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Info-Oltenia, 2016)

I 5 (elevi). O școală nu are bibliotecă și de aceea elevii hotărăsc să doneze cărți pentru a o înființa. O mare parte dintre elevii școlii donează cărți. Pentru ca să existe o evidență a cărților din bibliotecă se ia decizia ca fiecare elev care donează cărți să își aleagă un număr natural și să îl folosească la scrierea codurilor pe cărțile lui.

Codurile de pe cărți respectă următoarele reguli:

1. Codurile scrise de un elev pe cărțile donate de el sunt toate cifrele numărului ales, eventual în altă ordine.
2. Două cărți donate de același elev au coduri diferite.
3. Numerele alese de orice doi elevi au cel puțin o cifră diferită sau o cifră care apare de un număr diferit de ori.
4. Codurile scrise pe cărți nu încep cu cifra 0.

După ce s-a terminat operația de donație s-au obținut n cărți cu codurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se dorește să se cunoască numărul de cifre folosite la scrierea codurilor pe toate cărțile și numărul de elevi care au donat cărți.

Cerință

Cunoscând numărul de cărți n și codurile lor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se cere:

1. numărul de cifre folosite la scrierea codurilor pe toate cărțile;
2. numărul de elevi care au donat cărți.

Date de intrare

Fișierul de intrare `elevi.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află n, iar pe linia a treia se află codurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `elevi.out` se va scrie un singur număr natural, reprezentând numărul de cifre folosite la scrierea codurilor pe toate cărțile.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `elevi.out` se va scrie un singur număr natural, reprezentând numărul de elevi care au donat cărți.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10000$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere naturale cu maxim 9 cifre
- Pentru rezolvarea corectă a primei cerințe se acordă 20 de puncte, iar pentru cerința a doua se acordă 80 de puncte

Exemple

`elevi.in`	`elevi.out`	Explicație
1 5 121 1204 77 112 4201	16	$p = 1$ Numerele au în ordine 3, 4, 2, 3, 4 cifre, în total 16 cifre.

`elevi.in`	`elevi.out`	Explicație
2 5 121 1204 77 112 4201	3	$p = 2$ Au donat cărți trei elevi. Primul elev a donat cărțile cu codurile 121, 112, al doilea cărțile cu codurile 1204, 4201, iar al treilea o carte cu codul 77.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Violeta Bălan, Slatina

Clasa a X-a

I 6 (**Scufița Roșie**). Scufița Roșie pleacă de acasă prin pădure și trebuie să ajungă la bunica.Traseul prin pădure este plin de obstacole. Ea trebuie să ajungă pe cel mai scurt traseu la bunica. Scufița Roșie și-a făcut un plan și pentru a evita obstacolele a desenat harta pădurii pe un caiet de matematică în care a colorat, în pătrățelele caietului, obstacolele cu roșu iar pe celelalte pătrățele le-a lăsat libere (necolorate). A observat că harta are formă de pătrat. Pe

hartă se cunosc pozițiile Scufiței și bunicii. Deplasările sunt permise doar pe orizontală și pe verticală.

Ajutați-o pe Scufiță să ajungă pe traseul cel mai scurt de la locul ei la cel al bunicii, ocolind obstacolele. Harta are latura de n pătrățele, având aspectul unei matrice pătratice cu n linii și n coloane. Liniile și respectiv coloanele sunt numerotate de la 1 la n. Elementele matricei corespund zonelor pătrățelelor din foaia de caiet. O astfel de zonă poate fi colorată cu roșu sau cu alb. Scufița trebuie să treacă printr-un număr minim de zone libere.

Cerință

Scrieți un program care să determine numărul minim de zone libere pentru a alcătui traseul de la Scufiță la bunică.

Date de intrare

Fișierul de intrare `scufita.in` conține pe prima linie două valori naturale n și m separate printr-un spațiu, reprezentând dimensiunea hărții, respectiv numărul de obstacole aflate pe hartă. Fiecare dintre următoarele m linii conține câte două numere naturale x și y separate printr-un spațiu, reprezentând pozițiile obstacolelor de pe hartă (x reprezintă linia, iar y reprezintă coloana zonei în care se află obstacolul). Ultima linie a fișierului conține patru numere naturale x_1, y_1, x_2, y_2, separate prin câte un spațiu, x_1, y_1 reprezintă linia respectiv coloana poziției Scufiței, iar x_2, y_2 reprezintă linia respectiv coloana poziției bunicii.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `scufita.out` va conține o singură linie pe care va fi scris un număr natural care reprezintă numărul minim de zone prin care a trecut Scufița.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 175$
- $1 \leq m < n^2$
- Traseul începe cu zona unde se găsește Scufița și se termină cu zona unde se găsește bunica
- Pentru datele de test există întotdeauna soluție

Exemplu

`scufita.in`	`scufita.out`	Explicație
8 5 2 3 3 6 4 4 7 3 7 5 1 1 8 8	15	O modalitate de a constitui traseul este parcurgerea primei linii, apoi a ultimei coloane.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 5 MB.

Grațiela Ghiordunescu, Pitești (Dan Barbilian, 2018)

I 7 (parola). Un informatician dorește să-l stimuleze pe fiul său să folosească reguli matematice pentru a determina o parolă. Parola este formată din două numere ce sunt obținute din calcule. Scopul informaticianului este ca fiul său să-și însușească fracțiile zecimale neperiodice, periodice simple, respectiv periodice mixte și să transforme o fracție zecimală în fracție ordinară. Fiul său primește de la tată fracția zecimală, iar el pentru a sparge parola trebuie să determine două numere ce reprezintă numărătorul respectiv numitorul fracției ordinare echivalente, cu număr minim de cifre la numitor, cu numitorul fiind o cifră de 1 urmată eventual de zero-uri sau o cifră de 9 sau mai multe, urmate eventual de zero-uri.

De exemplu, $1{,}2(3) = \dfrac{123-12}{90} = \dfrac{111}{90}$, iar $12{,}500 = \dfrac{12500}{1000} = \dfrac{125}{10}$.

Cerință

Scrieți un program care citește o fracție zecimală strict pozitivă și afișează numărătorul și numitorul unei fracții ordinare echivalente constuită conform regulii de mai sus.

Date de intrare

Fișierul `parola.in` conține pe o singură linie un șir de maxim 80 de caractere reprezentând fracția zecimală. Caracterele din acest șir pot fi: cifre, eventual virgula zecimală ',' și parantezele '(' respectiv ')'.

Date de ieșire

Fișierul `parola.out` va conține două linii. Pe prima linie se va scrie numărătorul fracției, pe a doua linie se va scrie numitorul fracției.

Restricții și precizări

- Partea întreagă a unei fracții zecimale este formată din cel puțin o cifră
- Șirul citit poate conține cel mult 77 de cifre și reprezintă o fracție zecimală corectă

Exemplu

`parola.in`	`parola.out`	Explicație
5,67	567 100	$5,67 = \dfrac{567}{100}$

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 5 MB.

Grațiela Ghiordunescu, Pitești (Dan Barbilian, 2018)

I 8 (joc). De Crăciun, Ionel a primit cadou un joc de potrivire imagini. Toate piesele au aceleași dimensiuni, forma pătratică și sunt realizate din lemn de cea mai bună calitate. O piesă se împarte în $N \times N$ celule pătrate, identice ca dimensiuni, unele celule fiind pline, altele fiind decupate. Pentru a dezvolta abilitățile de coordonare mână-ochi, copilul trebuie să așeze piesele pe un suport tot pătratic de dimensiune $N \times N$. Piesele pot fi așezate cu oricare din cele două fețe deasupra. Astfel ele pot fi rotite atât pe orizontală cât și pe verticală. Anumite celule de pe suport sunt prevăzute cu tije de lemn verticale, prin care se va încerca plasarea pieselor.

Dimensiunile tijelor permit așezarea chiar și a tuturor pieselor, dacă acestea sunt decupate în celulele corespunzătoare tijelor. Fiecare piesă este prevăzută cu elemente speciale de susținere, astfel că dacă există $N \times N$ tije pe toată suprafața suportului, iar o piesă este decupată în toate celulele pătrate, atunci piesa se poate așeza pe suport. Nu este permisă așezarea unei piese care are mai multe celule decupate decât numărul tijelor. Cum Ionel este prea mic, neavând suficientă îndemânare de a manevra piesele pentru a le introduce prin tijele de pe suport, ajutați-l să le așeze, dacă este posibil.

Cerință

Scrieți un program care determină care dintre piese pot fi așezate pe suport.

Date de intrare

Fișierul de intrare `joc.in` conține pe prima linie două numere naturale N și P despărțite printr-un spațiu. N este dimensiunea suportului, precum și a pieselor, iar P reprezintă numărul pieselor. Urmează $P + 1$ blocuri de câte N linii fiecare. Primul bloc de N linii codifică suportul. Valoarea 1 apare dacă suportul este prevăzut cu tijă verticală, iar valoarea 0 în caz contrar. Următoarele P blocuri de câte N linii codifică fiecare câte o piesă. Pe fiecare linie sunt câte N valori întregi, despărțite printr-un singur spațiu, valoarea 1 codifică partea decupată, iar valoarea 0 partea care nu este decupată.

Date de ieșire

În fișierul de ieșire `joc.out` se vor scrie P linii, câte o valoare pe linie. Pe linia i se va scrie valoarea 1 dacă piesa i poate fi așezată pe suport astfel încât tijele să pătrundă prin porțiunile decupate ale piesei și valoarea 0 în caz contrar.

Restricții și precizări

- $1 < N, C \leq 50$

Exemplu

`joc.in`	`joc.out`	Explicație
3 2 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0	1 0	Piesa 1 se potrivește perfect suportului, dacă se rotește în sens trigonometric cu 90 de grade. Piesa 2 nu se potrivește suportului, indiferent de modul în care se încearcă așezarea sa prin tijele aflate pe suport.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 5 MB.

Cristina Constantinescu, Pitești (Dan Barbilian, 2018)

I 9 (**descifrare**)**.** Taberele sunt de fiecare dată pline de activități care rămân mult timp în mințile copiilor. Timpul petrecut în compania altor copii oferă ocazia de a socializa, de a face prieteni noi și de a participa la diverse activități. Secretul unei tabere reușite este să fie organizate mai multe tipuri de activități. În vacanța de iarnă, mai mulți elevi ai clasei a IV-a de la școala *Amicii Isteți* au mers împreună în tabără. Unul dintre jocurile care le-a trezit interes a fost cel care le oferea posibilitatea să descifreze un mesaj. Astfel, ei aveau la dispoziție un dicționar format din cuvinte uzuale precum și o înșiruire de cifre, fără cifra 0. Echipa câștigătoare trebuie să determine prima mesajul ce se ascunde în spatele cifrelor, constând dintr-o succesiune de cuvinte separate prin câte un spațiu.

Fiecare cifră are asociată un grup de litere. Cifra 2 este asociată literelor A, B sau C, cifra 3 este asociată literelor D, E și F, cifra 4 este asociată literelor G, H și I, cifra 5 este asociată literelor J, K și L, cifra 6 este asociată literelor M, N și O, cifra 7 este asociată literelor P, Q, R și S, cifra 8 este asociată literelor T, U și V, cifra 9 este asociată literelor W, X, Y și Z, iar cifra 1 este asociată tastei *Spațiu*. Prin urmare, dacă mesajul este format din cifrele 2 8 1, textul ascuns poate fi A T *Spațiu* sau A U *Spațiu,* etc, cuvintele corespunzătoare șirurilor de cifre putând fi: AT, AU, etc.

Pentru un posibil text ascuns obținut prin descifrarea consecutivă a cifrelor mesajului, se opresc doar cuvintele care există în dictionar, iar fiecare literă a unui cuvânt care nu este în dictionar va fi înlocuită cu un caracter *. Se vor verifica toate posibilitățile de formare a unui cuvânt conform regulilor de mai sus. Dacă există mai multe cuvinte care corespund unei anumite secvențe de cifre, va fi afișat primul.

Cerință

Scrieți un program care să descifreze mesajul transmis.

Date de intrare

Fișierul de intrare `desc.in` conține:

M - numărul de cuvinte din dicționar;

C_1

C_2

...

C_M - $C_1, C_2, \ldots, C_M$ reprezintă cuvintele din dicționar;

N - numărul de cifre din mesajul ce urmează a fi decriptat;

$cif_1\ cif_2\ \ldots cif_N$ - cifrele ce urmează a fi decriptate.

Date de ieșire

Fișierul de iesire `desc.out` conține pe o singură linie mesajul generat respectând regulile date.

Restricții și precizări

- $1 \leq M, N \leq 100$
- $cif_i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, oricare $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$

- Cuvintele $C_1, C_2, \ldots, C_M$ sunt ordonate alfabetic și sunt scrise cu majuscule, formate doar din litere ale alfabetului englez
- Lungimea oricărui cuvânt este de maxim 100 de litere

Exemplu

`desc.in`	`desc.out`	Explicație
5 ACASA ANA LA MERGE SCOALA 11 2 1 2 3 1 2 2 2 7 2 1	* ** ACASA	Pentru cele 5 cuvinte existente în dicționar, mesajul ascuns în spatele cifrelor se află în fișierul de ieșire.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 5 MB.

Cristina Constantinescu, Pitești (Dan Barbilian, 2018)

I 10 (**cecuatii**). Ionică și Tică sunt buni prieteni, pasionați de două lucruri: matematică și informatică. Aceștia participă la un concurs de propunători de probleme pe echipe. Pentru a avea succes, Tică vrea să propună o problemă cu ecuații, iar Ionică o problemă cu mulțimi. După consultări repetate se decid să participe la concurs cu o problemă care folosește atât ecuații cât și mulțimi. În această problemă se dau N ecuații de forma $A_i x + B_i y + C_i z = D_i$, $1 \leq i \leq N$ și se notează cu S_i mulțimea $\{x + y + z | A_i x + B_i y + C_i z = D_i,\ x, y, z$ numere naturale$\}$, $1 \leq i \leq N$. Cerința problemei este determinarea a două numere naturale N_1 și N_2, unde $N_1 = Max + FMax$, respectiv $N_2 = \text{card}(S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_N)$. Max este cel mai mare număr dintre $\text{card}(S_i)$, $1 \leq i \leq N$, iar $FMax$ este de câte ori apare Max printre $\text{card}(S_1), \text{card}(S_2), \ldots, \text{card}(S_N)$.

Cerință

Se cunosc N și numerele $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots, A_N, B_N, C_N, D_N$ și se cere să se determine numerele N_1 și N_2.

Date de intrare

Din fișierul `cecuatii.in` se citesc: numărul natural p de pe prima linie, ce poate avea două valori: 1 sau 2, corespunzătoare uneia din cele două cerințe, adică 1 pentru determinarea lui N_1 și 2 pentru determinarea lui N_2; numărul N de pe a doua linie și, de pe următoarele N linii, câte patru numere naturale separate prin câte un spațiu reprezentând coeficienții ecuațiilor: A_i, B_i, C_i, D_i, $1 \leq i \leq N$.

Date de ieșire

În fișierul `cecuatii.out` se va scrie numărul N_1, dacă $p = 1$ și respectiv numărul N_2, dacă $p = 2$, cu semnificația din enunț.

Restricții și precizări

- $1 < N \leq 1000$, număr natural

- A_i, B_i, C_i, D_i sunt numere naturale nenule mai mici strict decât 1000, $1 \leq i \leq N$
- Pentru o mulțime M, card(M) reprezintă numărul de elemente ale mulțimii M
- Pentru mulțimile M și P, notăm cu $M \cup P$ reuniunea dintre M și P

Exemple

cecuatii.in	cecuatii.out	Explicație
1 2 1 1 1 1 1 2 1 2	3	$p = 1$ și deci afișăm N_1. Prima ecuație este $x + y + z = 1$, iar a doua $x + 2y + z = 2$. Obținem soluțiile (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) pentru prima ecuație și (1,0,1), (0,1,0), (0,0,2), (2,0,0) pentru a doua ecuație. $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, 2\}$, $Max = 2$, $FMax = 1$, deci $N_1 = 3$.

cecuatii.in	cecuatii.out	Explicație
2 2 1 1 1 1 1 2 1 2	2	$p = 2$ și deci afișăm N_2. Prima ecuație este $x + y + z = 1$, iar a doua $x + 2y + z = 2$. Obținem soluțiile (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) pentru prima ecuație și (1,0,1), (0,1,0), (0,0,2), (2,0,0) pentru a doua ecuație. $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, 2\}$, $S_1 \cup S_2 = \{1, 2\}$, deci $N_2 = 2$.

Timp maxim de execuție: 0.04 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Micul Gates, 2017)

Clasele a XI-a și a XII-a

I 11 (arici). Într-o livadă de formă dreptunghiulară există doi arici care doresc să ajungă la *căsuța aricilor*. În livadă sunt m rânduri de pomi, iar pe fiecare din cele m rânduri există n pomi la o distanță de 1 dam. La baza fiecărui pom există un număr de mere (un număr natural de exact două cifre).

Fiecare dintre cei doi arici dorește să ajungă cât mai repede la *căsuța aricilor* și astfel se organizează o competiție între ei, câștigătorul fiind ariciul care ajunge pe drumul cel mai scurt, drum măsurat în distanța parcursă de arici în dam de la poziția lui din livadă la *căsuța aricilor*. Fiecare din cei doi arici are un cod de acces, un număr natural de exact 5 cifre nenule. Pe baza acestui cod aricii au sau nu acces la merele căzute din pom. Un arici are acces la merele de la baza unui pom dacă numărul de mere căzute are cel puțin o cifră care se găsește în codul de acces al ariciului. Fiecare arici se găsește inițial lângă un anumit pom din livadă. Aricii se pot

deplasa prin livadă, de la un pom la fiecare din cei cel mult 4 pomi vecini la care au acces, doar pe direcțiile paralele cu laturile livezii.

Cerință

Cunoscând dimensiunile livezii m și n, numărul de mere căzute din fiecare din cei $m \cdot n$ pomi, coordonatele L, C unde se află *căsuța aricilor*, coordonatele celor doi arici și codurile lor de acces, determinați:

1. numărul X de pomi la care au acces ambii arici;

2. numărul Nr al ariciului câștigător (1 sau 2, corespunzător cu numărul de ordine al ariciului), distanța minimă $Dmin$ pe care o parcurge ariciul câștigător pentru a ajunge la *căsuța aricilor* și numărul NrM de pomi de unde ar putea pleca ariciul câștigător astfel încât să parcurgă aceeași distanță minimă până la *căsuța aricilor*.

Date de intrare

Fișierul de intrare `arici.in` conține:

- pe prima linie un număr natural p; pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2;

- pe a doua linie două numere naturale nenule m, n, separate prin câte un spațiu, cu semnificațiile din enunț;

- pe linia a treia două numere naturale nenule L, C, separate prin câte un spațiu, cu semnificațiile din enunț;

- pe liniile a patra și a cincea câte trei numere naturale reprezentând coordonatele pomilor unde se găsesc inițial cei doi arici (linia, coloana) și codul de acces al aricilor: x_1, y_1, c_1, respectiv x_2, y_2, c_2;

- pe următoarele m linii câte n numere naturale de exact două cifre, separate prin câte un spațiu, reprezentând numărul de mere căzute din fiecare pom al livezii.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `arici.out` se va scrie un singur număr natural, X, reprezentând numărul total de pomi la care au acces ambii arici.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, fișierul de ieșire `arici.out` va conține numerele naturale Nr, $Dmin$ și NrM, în această ordine, separate prin câte un spațiu.

Restricții și precizări

- $2 \leq m, n, L, C, x_1, y_1, x_2, y_2 \leq 300$
- $11111 \leq c_1, c_2 \leq 99999$
- $10 \leq$ numărul de mere căzute din fiecare pom ≤ 99

- Pentru toate testele problemei există soluție, adică există cel puțin un arici care poate ajunge la *căsuța aricilor*
- Dacă cei doi arici parcurg aceeași distanță până la *căsuța aricilor*, este considerat câștigător primul arici
- Mere căzute din pom se pot găsi și în locuri la care aricii nu au acces
- Pentru rezolvarea corectă a primei cerințe se acordă 20% din punctaj, iar pentru cerința a doua 80% din punctaj
- Pentru primele 30% dintre testele care verifică cerința 2) avem $m \leq 20$ și $n \leq 20$
- Pentru determinarea corectă a numerelor Nr și $Dmin$ se acordă 80% din punctajul testului, iar pentru determinarea corectă a numărului NrM se acordă 20% din punctaj

Exemple

arici.in	arici.out	Explicație
1 5 6 3 5 1 2 12351 5 1 46123 15 12 37 12 78 19 16 17 18 19 25 20 21 25 26 89 25 25 24 78 29 31 24 89 23 25 46 25 96 25	24	$p = 1$ Există 24 de pomi în livadă la care au acces ambii arici, și anume toți pomii cu excepția celor 6 pomi care au numărul de mere căzute 46, 78, 89 sau 96.

arici.in	arici.out	Explicație
2 5 6 3 5 1 2 12351 5 1 46123 15 12 37 12 78 19 16 17 18 19 25 20 21 25 26 89 25 25 24 78 29 31 24 89 23 25 46 25 96 25	1 5 3	$p = 2$ Ariciul cu numărul de ordine 1 se află la pomul de coordonate (1,2) și poate ajunge la *căsuța aricilor* pe traseul: (1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(2,5),(3,5), parcurgând o distanță de 5 dam. De asemenea mai există și alți doi pomi de la care ar putea pleca ariciul 1 și ar parcurge aceeași distanță de 5 dam până la *căsuța aricilor*, și anume pomii de coordonate (2,1) și (3,2). Ariciul 2 poate ajunge la *căsuța aricilor* parcurgând o distanță de 6 dam, pe traseul: (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(4,5),(3,5).

Timp maxim de execuție: 0.5 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 8 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Adriana Oprea, Pitești

I 12 (**cuvinte**). Se consideră două cuvinte formate numai din litere mici ale alfabetului englez, notate cu c_1 si c_2. Pentru aceste cuvinte se dorește să se rezolve două cerințe.

Prima cerință este legată de verificarea condiției de subșir de caractere a lui c_2 în c_1, adică dacă se pot șterge caractere din c_1 astfel încât să se obțină c_2. Dacă c_2 este subșir în c_1 se dorește șirul de poziții pe care se află, fără spații. Numărul obținut se va numi POZ. De exemplu pentru c_1 =ababcd și c_2 =abd, răspunsul este afirmativ, POZ putand fi 126 sau 346. Pozițiile în cuvinte sunt 1, 2, 3, ...

A doua cerință este să se construiască un nou cuvânt c_3 cu litere distincte sau cu o singură literă care să se repete de două ori, astfel încât să respecte regulile:

1. literele din c_3 trebuie să apară în c_1 sau c_2;
2. litera care se repetă trebuie să apară în total de cel puțin două ori în c_1 și c_2.

Cerință

Cunoscând cele două cuvinte c_1 și c_2 se cere:

1. să se verifice dacă c_2 este subcuvânt în c_1 și să se determine cel mai mic număr POZ, în caz afirmativ, altfel se va afișa cifra 0;

2. numărul de cuvinte c_3 distincte ce se pot construi cu regulile din enunț, de la a doua cerință.

Date de intrare

Fișierul de intrare `cuvinte.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află cuvântul c_1, iar pe linia a treia cuvântul c_2.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `cuvinte.out` se va scrie rezultatul de la cerința 1, adică 0 sau cel mai mic POZ cu semnificația din enuț.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `cuvinte.out` se va scrie numărul de la cerința 2, modulo 9901.

Restricții și precizări

- $1 \leq$ număr caractere din $c_1 \leq 250$,
- $1 \leq$ număr caractere din $c_2 \leq 250$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj
- k modulo p reprezintă restul împărțirii întregi a lui k la p

Exemple

cuvinte.in	cuvinte.out	Explicație
1 ababcd abd	126	$p = 1$ POZ poate fi 126 sau 346, iar 126 este cel mai mic. Pentru POZ=126, înseamnă că se păstrează din c_1 literele de pe pozițiile 1, 2, 6, se șterg cele de pe pozițiile 3, 4, 5 și se obține c_2.

cuvinte.in	cuvinte.out	Explicație
2 adcd ad	29	$p = 2$ Cuvintele ce se pot forma cu respectarea regulilor din enunț sunt: a, d, c, ad, da, ac, ca, dc, cd, aa, dd, dac, dca, adc, acd, cda, cad, daa, ada, aad, caa, aca, aac, cdd, dcd, ddc, add, dad, dda.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Info-Oltenia, 2016)

I 13 (**litere**). În fiecare pătrățel al unei table de șah de dimensiune $m \times n$ se află câte o piesă pe care este scrisă o literă mică din alfabetul englez. Georgică dorește să-și verifice cunoștințele de informatică folosind tabla de șah și piesele. Astfel el dorește să determine:

1. numărul de cuvinte Nr de lungime k ce se pot forma, cu litere distincte și în ordine alfabetică, folosind piese de pe tabla de șah;
2. lungimea minimă L a unui cuvânt format cu piese vecine de pe tabla de șah ce conțin numai vocale, astfel încât să conțină o piesă de pe prima linie și o piesă de pe ultima linie; două piese sunt vecine, dacă au o latură comună.

Cerință

Cunoscând numerele m, n, k și piesele de pe tabla de șah se cere:

1. numărul Nr cu semnificația de mai sus;
2. numărul L cu semnificația de mai sus.

Date de intrare

Fișierul de intrare `litere.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află m, n și k, separate prin câte un spațiu, iar pe următoarele m linii literele tabloului, fără spațiu între ele.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `litere.out` se va scrie numărul Nr.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `litere.out` se va scrie numărul L.

Restricții și precizări

- $1 \leq m, n \leq 100$
- $1 \leq k \leq 26$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 40% din punctaj

Exemple

`litere.in`	`litere.out`	Explicație
1 3 4 2 abab eaaa bbbe	3	$p = 1$ Se pot forma 3 cuvinte: ab, ae, be

`litere.in`	`litere.out`	Explicație
2 3 4 2 abab eaaa bbbe	4	$p = 2$ Se pot forma două cuvinte (îngroșate mai jos): **a**bab **eaaa** bbb**e** respectiv: ab**a**b ea**aa** bbb**e** Cel mai scurt, **aaae**, are 4 litere.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Info-Oltenia, 2016)

I 14 (**veverița**). Într-un parc din oraș se află n pomi, pentru care se cunosc coordonatele carteziene pe harta orașului. Pomii sunt numerotați cu $1, 2, \ldots, n$. În parc se mai află o veveriță foarte isteață, dar care poate sări din pom în pom doar dacă distanța dintre aceștia este cel mult

egală cu k. În cazul în care veverița vrea să se deplaseze de la un pom la altul mai îndepărtat, aceasta trebuie să riște să fie alergată de câini.

Veverița dorește să afle:

- de câte ori trebuie să riște să fie alergată de câini pentru a se deplasa în fiecare pom;

- distanța cea mai mică pe care trebuie să o parcurgă pe jos pentru a se deplasa în toți pomii din parc.

Cerință
Cunoscând numerele n, k și coordonatele pomilor, determinați:

1. de câte ori trebuie să riște veverița să fie alergată de câini pentru a se deplasa în fiecare pom;

2. distanța cea mai mică pe care trebuie să o parcurgă pe jos veverița pentru a se deplasa în toți pomii din parc.

Date de intrare
Fișierul de intrare `veverita.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află n si k, separate printr-un spațiu, iar pe următoarele n linii perechi de numere naturale de forma x y, ce reprezintă coordonatele pomilor.

Date de ieșire
Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `veverita.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând de câte ori trebuie să riște să fie alergată de câini veverița pentru a se deplasa în fiecare pom.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `veverita.out` se va scrie distanța cea mai mică pe care trebuie să o parcurgă pe jos veverița pentru a se deplasa în toți pomii din parc.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 500$
- Coordonatele punctelor sunt numere naturale mai mici sau egale cu 1000000
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj
- 20% din testele cu $p = 2$ au $n \leq 20$
- Pentru distanța dintre două puncte se va folosi *distanța Manhattan*, adică distanța dintre $P(x_1, y_1)$ și $Q(x_2, y_2)$ este

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Exemple

veverita.in	veverita.out	Explicație
1 5 8 5 12 100 14 2 8 100 8 10 8	1	$p = 1$ Veverița poate să sară între pomii: 1 și 3, 3 și 5, 2 și 4. Trebuie să riște să meargă pe jos o singură dată între doi pomi.

veverita.in	veverita.out	Explicație
2 5 8 5 12 100 14 2 8 100 8 10 8	90	$p = 2$ Veverița poate să sară între pomii: 1 și 3, 3 și 5, 2 și 4. Trebuie să meargă pe jos între pomii 4 și 5 pe o distanță egală cu 90.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești, *Gabriel Nicolae*, București (Info-Oltenia, 2016)

I 15 (**case**)**.** Cu mult timp în urmă, mai multe case s-au construit fără un plan urbanistic, formând o comună. În zilele noastre, primarul comunei vrea să împartă comuna în sate pentru a gestiona mai ușor problemele comunității. Pentru a simplifica lucrurile, primarul dorește ca satele să aibă suprafața pătratică cu laturile paralele cu axele hărții. Primarul cunoaște coordonatele caselor, casele fiind numerotate cu $1, 2, \ldots, n$, coordonatele colțurilor din stânga-jos și laturile suprafețelor celor k sate. Satele sunt numerotate cu $1, 2, \ldots, k$. Suprafețele satelor sunt disjuncte. Din păcate se poate întâmpla ca unele case să fie în afara satelor.

Primarul dorește să acceseze fonduri europene pentru un sistem de canalizare pe care să-l dezvolte ulterior. Pentru acest lucru întocmește un plan fiecărui sat, în care trasează segmente între anumite case astfel încât să se formeze un poligon convex; pe acolo va trece sistemul de canalizare, astfel încât toate casele satului care nu sunt legate prin aceste segmente să fie în interiorul poligonului.

Cerință

Cunoscând numerele n, k, coordonatele caselor și datele suprafețelor satelor (coordonatele colțului stânga-jos și lungimea suprafeței), determinați:

1. numărul de case care nu fac parte din niciun sat;

2. numărul de case ce vor face parte din sistemul de canalizare al fiecărui sat i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Date de intrare

Fișierul de intrare `case.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află n și k, pe linia a treia se află n perechi de numere, una după alta, separate prin câte un spațiu, perechi de forma abscisă ordonată, reprezentând coordonatele caselor, iar pe linia a patra se află k triplete de forma abscisă ordonată lungime, separate între ele prin spații, reprezentând coordonatele colțului din stânga-jos și lungimea suprafeței satelor.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `case.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de case care nu fac parte din niciun sat.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `case.out` se vor scrie, separate prin câte un spațiu, numerele de case ce vor face parte din sistemul de canalizare al fiecărui sat i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$
- $1 \leq k \leq 10$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj
- Coordonatele caselor sunt numere naturale mai mici sau egale cu 10^9
- O casă dacă se găsește pe un segment al sistemului de canalizare înseamnă că face parte din acest sistem
- O casă aflată chiar pe frontiera satului se presupune că face parte din sat
- Satele sunt disjuncte, adică nu au interior sau frontieră comună

Exemple

`case.in`	`case.out`	Explicație
1 7 1 6 10 8 0 20 0 2 5 4 5 4 0 6 0 2 0 10	1	$p = 1$ Avem casele cu coordonatele: $C_1(6, 10)$, $C_2(8, 0)$, $C_3(20, 0)$, $C_4(2, 5)$, $C_5(4, 5)$, $C_6(4, 0)$, $C_7(6, 0)$ și un singur sat cu suprafața pătratică având colțul din stânga-jos de coordonate $(2, 0)$ și latura de lungime 10. C_3 este singura casă care nu face parte din sat.

case.in	case.out	Explicație
2 7 1 6 10 8 0 20 0 2 5 4 5 4 0 6 0 2 0 10	5	$p = 2$ Avem casele cu coordonatele: $C_1(6, 10)$, $C_2(8, 0)$, $C_3(20, 0)$, $C_4(2, 5)$, $C_5(4, 5)$, $C_6(4, 0)$, $C_7(6, 0)$ și un singur sat cu suprafața pătratică având colțul din stânga-jos de coordonate $(2, 0)$ și latura de lungime 10. Casele C_1, C_2, C_4, C_6, C_7 vor face parte din sistemul de canalizare.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești, *Gabriel Nicolae*, București (Info-Oltenia, 2016)

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII

Formula de alungare a lui L. Euler

Stelian Corneliu Andronescu [1]

Marele matematician Leonhard Euler își câștigase reputația de a rezolva orice problemă cu care era confruntat.

În timpul retragerii sale la curtea Ecaterinei cea Mare, el l-a cunoscut pe marele filosof francez Denis Diderot. Diderot era un ateu convins și avea să-și petreacă viața convertindu-i pe ruși la ateism. Înfuriată, Ecaterina i-a cerut lui Euler să pună capăt eforturilor acestui francez fără Dumnezeu. Euler s-a gândit o vreme la această problemă și a pretins că are o dovadă algebrică a existenței lui Dumnezeu. Ecaterina cea Mare i-a invitat pe Euler și pe Diderot la palat și și-a adunat curtenii spre a asculta dezbaterea teologică. Euler a apărut în fața publicului și a spus:

„Domnule, $\frac{a+b^n}{n}=x$, deci Dumnezeu există. Răspundeți!"

Fără a înțelege mare lucru din algebră, Diderot n-a fost în stare să-i replice lui Euler și a rămas fără grai. Umilit, a părăsit St. Petersburg-ul și s-a întors la Paris.

L. Euler (15.04.1707 − 18.09.1783) a fost cel mai prolific și unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, dominând cu autoritate matematica secolului al XVIII-lea. Marele savant, a reunit o intuiție formidabilă cu o imaginație creatoare excepțională, o memorie inegalabilă, abilități de calcul extraordinare și o putere de muncă fantastică.

Opera lui L. Euler a impulsionat puternic întreaga dezvoltare a matematicii.

Bibliografie

[1] S. Singh, *Marea Teoremă a lui Fermat*, Ed. Humanitas, București, 1998.

[2] P. Minuț, 300 *de ani de la nașterea lui Leonhard Euler (1707-1783)*, Recreații Matematice, nr. 1/2007.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com

Revistă sponsorizată de
ROWEB Development SRL
și
OSF Global Services SRL